第一章　分式线性变换

分式线性变换又叫麦比乌斯变换(Möbius, 1790—1868)，这是一类优美的几何变换。它在后面我们讨论双曲非欧几何时扮演着重要的角色。作为准备知识，本章将系统地介绍它的基本性质与分类。此外还将介绍与此有关的反演变换。已经熟悉这些内容的读者可以直接阅读下一章。

§1 复数与几何

本书的主题是几何，但使用的工具却是复数。所以我们不妨先从复数与几何的联系讲起。

复数最初是为了解二次代数方程式而引入的。但仔细想想就发现，对于解二次方程而言，引进复数并没有带给我们任何“实际好处”。只不过是在$b^2-4ac<0$时把方程式$ax^2+bx+c=0$视作有根，而这种根是一种不同于实数的数罢了。至于这种数是什么，谁也没有提供进一步的信息。

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

从历史上看复数的第一次有实际意义的应用恐怕是解三次方程式与四次方程式。一个一般形式的三次方程式通过一个简单变换总可化归成下列形式：

$$x^3+px+q=0.$$

利用配方的办法就可以得到这个方程的根的公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

这个公式最早是由塔尔塔里雅（Tartaglia，1500—1557）得到的，但习惯上仍叫作卡尔丹(Cardan，1501—1576)公式。

我们把发明权的争论留给历史学家们，而仔细考查一下这个公式。当

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

时，原来的三次方程仍然有可能有实根。(你能自己举出例子吗?)然而这个实根却要经过复数的运算才能获得。（因为这时在卡尔丹的公式中出现了复数。)这真是奇妙之极!

四次方程也有类似的情况。

尽管复数在解代数方程中有着不可缺少的作用，但人们总对它有一种虚无飘渺之感。经过几个世纪怀疑与争论，到了高斯(Gauss，1777—1855）的时代，情况发生了根本的变化。高斯把复数$z=x+iy$解释为平面上的点(x,y)或自原点至点(x,y)的向量。这样一来，人们对于复数有了某种真实感，并逐渐习以为常地接受下来。

不仅如此，高斯对复数的几何解释使得复数与几何从此结下不解之缘。复数的作用也就大大超出了解方程的范围。

今天现代数学的几乎所有分支都与复数有关。就连研究整数的数论也离不开复数。

复数与几何的关联使得许多平面的几何问题在借助于复数运算处理时显得十分方便。这在后面的讨论中会看到这一点。

由于复数是我们的基本工具，所以我们要求读者熟悉复数的几何表示及各种运算。今后，我们用$\boldsymbol{C}$表示全体复数的集合，又表示复平面.用$\boldsymbol{R}$表示全体实数的集合，又表示复平面上的实轴。有关复数的记号，如$\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$，$\bar{z}$，$|z|$等，都与一般中学课本中一致。辐角$\arg z$本书中特别规定其取值范围为$(-\pi,\pi]$。这一点可能与某些书不一致，请读者留意。

§2 复球面——直线与圆周的统一

世间一切对立着的事物都在一定的条件下达到统一。直线与圆周也是如此。而且在后面的讨论中我们须要把它们统一起来。

我们先来看看直线与圆周的复方程如何从形式上得到统一。平面上取定直角坐标系之后，一条直线的实坐标的方程是

$$ax+by+c=0,\ a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$$

令$z=x+iy$并注意到$x=(z+\bar{z})/2$与$y=(z-\bar{z})/2i$，立即就得到这条直线的复方程

$$(a-ib)z+(a+ib)\bar{z}+2c=0.$$

因此，一条直线的复方程的一般形式是

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\boldsymbol{C},\ \gamma\in\boldsymbol{R}, \qquad (2.1)$$

其中$\beta\neq0$。

以点$z_0\in\boldsymbol{C}$为中心，以$r\in\boldsymbol{R}$为半径的圆周的复方程显然是$|z-z_0|=r$或$|z-z_0|^2=r^2$。表面上它与直线方程相差甚远，但是经过一番变形之后就会发现它们的共同之处。

注意到$|z-z_0|^2=(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$，方程$|z-z_0|^2=r^2$可写为

$$z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0.$$

对上述方程两端各乘以实数$\alpha\neq0$，就变成

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbf{C},\ \alpha,\gamma\in\mathbf{R}, \qquad (2.2)$$

其中

$$\beta=-\alpha z_0,\ \gamma=\alpha(|z_0|^2-r^2). \qquad (2.3)$$

反过来，任意给一个方程$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0$(其中$\beta\in\mathbf{C}$，$\alpha$，$\gamma\in\mathbf{R}$)，如果适合下列条件

$$\alpha\neq0,\ \alpha\gamma<|\beta|^2, \qquad (2.4)$$

则一定代表一个圆周。请读者证明这一结论，并求出该圆周的圆心与半径(提示：注意(2.3))。

比较直线与圆周的复方程(2.1)与(2.2)就发现两者只差一项。前者是后者的特殊情况：$\alpha=0$。

总之，方程式

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbf{C},\ \alpha,\ \gamma\in\mathbf{R} \qquad (2.5)$$
$$(\alpha\gamma<|\beta|^2)$$

代表圆周($\alpha\neq0$)或直线($\alpha=0$)。直线与圆周有了统一的表达形式。

圆周与直线的统一又可以通过无穷远点的引入实现。这导致复球面的概念。

在三维空间中取定一个直角坐标系$Oxyw$，并考虑一个以点(0,0,1/2)为中心、以1/2为半径的球面S，如图1—2.1.

我们将点(0,0,1)称作球面S的北极并记为n。对于任意一点$P\in S-\{n\}$，我们作n至P的连线并延长之，势必交坐标平面Oxy于一点P'。这时称P'为P点的测地投影，而对应$p\mapsto p'$称为球极映射。显然，这个映射是$S-\{n\}$到坐标平面Oxy的一个

一一映射，并且是映满的。

设$P\in S-\{n\}$的坐标为(ξ,η,ζ)，而它的测地投影P'的坐标

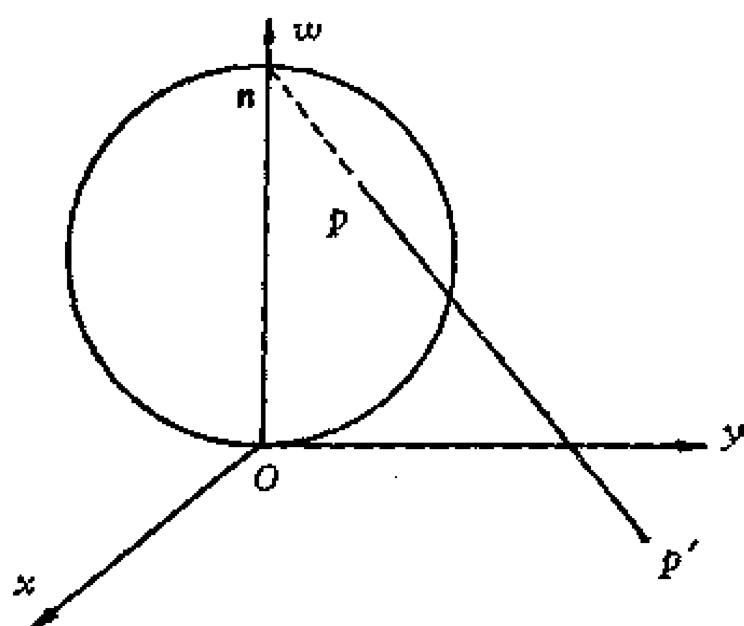


图1—2.1

为$(x,y,0)$。通过一个并不复杂的分析就得出下列关系式：

$$\xi=\frac{x}{1+x^2+y^2},$$

$$\eta=\frac{y}{1+x^2+y^2},$$

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

这里我们省略了推导这些关系式的步骤是因为这些关系式今后用得不多。

现在把坐标平面Oxy视作复平面，并把它上面的点(x,y)看作复数$z=x+iy$，那么上述三个关系式就化成

$$\xi=\frac{\mathrm{Re}z}{1+|z|^2},$$

$$\eta=\frac{\mathrm{Im}z}{1+|z|^2},$$

$$\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

由此容易看出：当$|z|\to\infty$时，$\xi\to 0$，$\eta\to 0$，$\zeta\to 1$，也即点$p=(\xi,\eta,\zeta)\to n$。这就是说，当点z远离原点而趋向于无穷远时，点z在S上的相应点p则趋向于北极n。

这启发我们除了原有的复数之外再引进一个新的复数∞与球面的北极n相对应。复数∞也可以看作在复平面$\mathbb{C}$上增加了一点，它代表着无穷远，并称为无穷远点。

复平面$\mathbb{C}$上加了这个点之后被称为扩充复平面或复球面，并记作$\hat{\mathbb{C}}$或$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。本书中采用复球面的术语。

复球面的模型是球面S，但复球面本身并不是S。

对于这个不寻常的复数∞，我们约定它的模是无穷大。与$z=0$一样，∞无辐角可言。此外，我们约定它可以作下列运算：

$$\infty\pm z=z\pm\infty=\infty,\ \frac{z}{\infty}=0,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

$$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\ \frac{z}{0}=\infty,\ \forall z\in\mathbb{C}-\{0\}.$$

一般说来，∞/∞，$\infty\pm\infty$都没有确定的值，要视具体情况而定。但是，$\infty\cdot\infty$总等于∞。

引入了无穷远点及复球面的概念之后，我们就可以把直线看成是通过无穷远点的圆周。

这种看法是有直观依据的。设l是坐标平面Oxy上的一条直线。现在我们来说明，在球极映射中l在球面上的逆像是一条通过北极n的圆周。

事实上，根据球极投影的定义，直线l在S上的逆像应该落在北极n与直线l所决定的平面上，见图1—2.2。因此，这个逆

像恰好就是n与l所决定的平面跟S的交线。它显然是通过北极n的一个圆周。

图 1—2.2

基于上述直观模型，我们有理由把复平面上的直线叫作是**复球面上通过∞的圆周**。

显然，在复球面上无穷远点是所有直线之共同交点。

今后凡讲到复球面上的圆周时既指通常的圆周又指过∞的圆周(即直线)。

§3 交比——再论直线与圆周的统一

数学上有许多刻划某种特征的量，其定义简单明了，但却包含丰富深刻的内涵。复数的交比就是一个这样的量。

复平面$\mathbb{C}$上给定了四点z_1，z_2，z_3，z_4（其中任意两点均不相同）.比值

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$$

被称为给定四点z_1，z_2，z_3，z_4的**复比**或**交比**，记作$[z_1, z_2; z_3, z_4]$。

交比又可看作两个单比之比。所谓点z_1，z_2，z_3的**单比**是指比值

$$\frac{(z_1-z_3)}{(z_2-z_3)}$$

记作$[z_1, z_2; z_3]$。显然，我们有

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]=\frac{[z_1, z_2; z_3]}{[z_1, z_2; z_4]}.$$

现在我们来说明单比与交比的几何意义。

将点z_1，z_2，z_3分别记作A，B，C，并令$\rho=|[z_1, z_2; z_3]|$，$\theta=\arg[z_1, z_2; z_3]$。很显然，$\rho$恰好是线段$\overline{AC}$与$\overline{BC}$的长度之比，而$\theta$的绝对值恰好就是$\overline{AC}$与$\overline{BC}$在点$C$所夹的劣角（即不超过$\pi$的角）。当线段$\overline{CB}$以$C$为中心在此劣角内旋转至$\overline{CA}$时，若旋转方向是逆时针的，$\theta$取正值；否则$\theta$取负值。应当说明，当$|\theta|=\pi$时，旋转方向不确定。我们约定这时$\theta$只取正值。

这些结论请读者根据复数除法的几何意义进行验证．并注意我们关于arg取值范围的规定。

这样，我们有下列结论：

三个不同的点z_1，z_2，z_3落在同一直线上的充要条件是

$$\arg[z_1, z_2; z_3]=0\text{或}\pi,$$

也即单比$[z_1, z_2; z_3]$是实数。

交比的几何意义一下还难于说得十分透彻，有些还要到下一节中再讲。令

$$\rho_1=|[z_1, z_2; z_3]|,\quad \theta_1=\arg[z_1, z_2; z_3],$$

$$\rho_2=|[z_1, z_2; z_4]|,\quad \theta_2=\arg[z_1, z_2; z_4].$$

那么

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

交比的模ρ_1/ρ_2的意义是再清楚不过了，它是四条线段形成的一个比值。但交比$[z_1, z_2; z_3, z_4]$的辐角$\theta_1-\theta_2$的几何意义，尚须分情况讨论。

我们不妨假定z_3与z_4不落在z_1与z_2所决定的直线上。这时只有两个情况应区别讨论：(i)z_3与z_4在z_1与z_2所决定的直线的同一侧；(ii)z_3与z_4分居于z_1与z_2所决定直线的两侧。

很容易看出，在第(i)种情况下，θ_1与θ_2同号，而在第(ii)种情况下，θ_1与θ_2符号相反。见图1—3.1(a)及(b)。

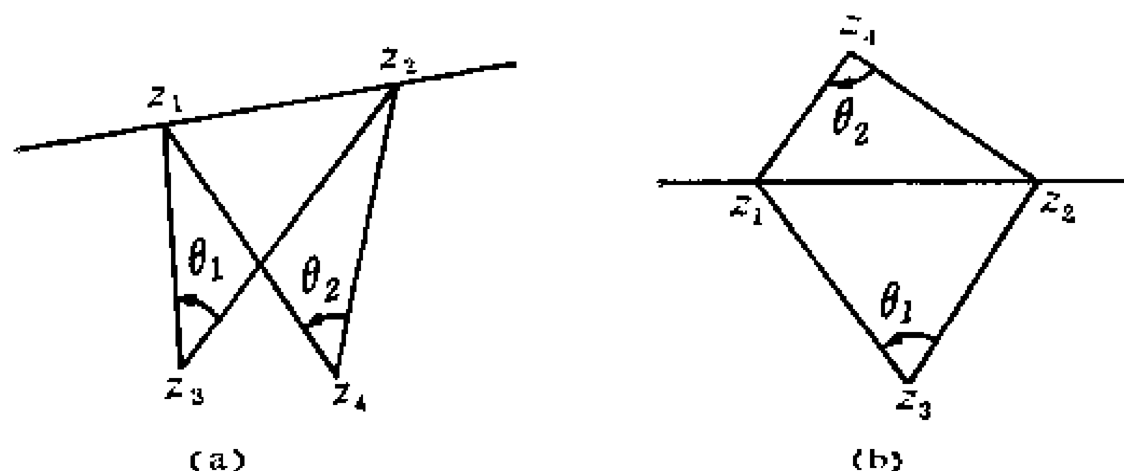


图1—3.1

这样，在第(i)种情况下，$|\theta_1-\theta_2|=||\theta_1|-|\theta_2||$，而在第(ii)种情况下，$|\theta_1-\theta_2|=|\theta_1|+|\theta_2|$。

现在我们暂时不讨论$\theta_1-\theta_2$的几何意义，只讨论一个问题：何时交比$[z_1,z_2;z_3,z_4]$为实数，也即$\theta_1-\theta_2=0$或$\pm\pi$。

当z_3与z_4均不落在z_1与z_2所决定的直线上时，这个交比是实数的充要条件是：在情况(i)下$\theta_1=\theta_2$，而在情况（ii）下，$|\theta_1|+|\theta_2|=\pi$。根据平面几何中大家熟知的定理，不论在哪种情况下，这意味着四点z_1,z_2,z_3,z_4共圆。

这样，我们证明了下述结论：

不共线的四点z_1,z_2,z_3,z_4共圆的充要条件是它们的交比

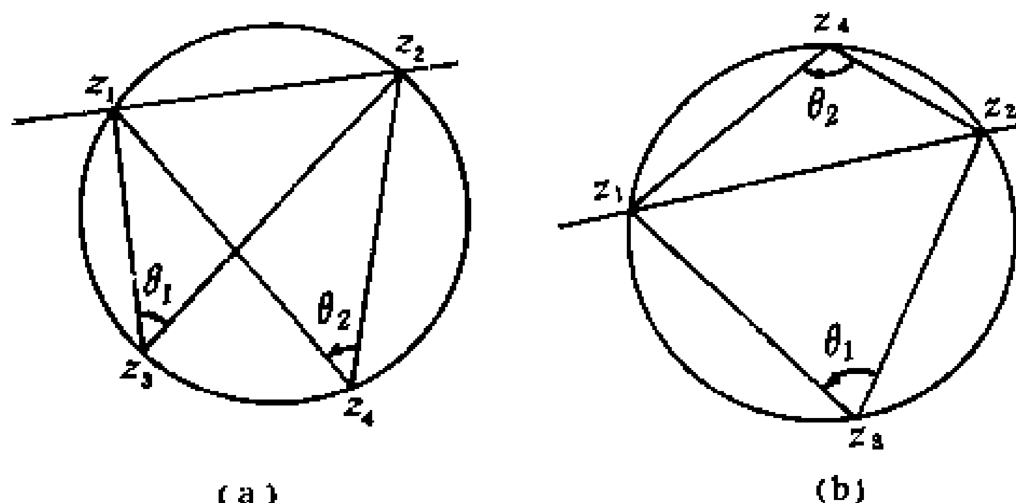


图1—3.2.

为实数。(这里所说四点不共线是指其中任意三点均不共线。)

现在，我们讨论z_3与z_4中有一点落在z_1与z_2所决定的直线上的情况。这时显然交比$[z_1,z_2;z_3,z_4]$是实数的充要条件是四个点全在同一条直线上。

总之，我们证明了下列定理

定理3.1 设$z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbf{C}$是任意四个点。则它们共线或共圆的充要条件是交比$[z_1,z_2;z_3,z_4]$是实数。

四点共线与四点共圆有一个相同的必要条件即其交比是实数。这一点表明了直线与圆周有一种共同的特征：交比使我们再次看到了直线与圆周的统一性。

现在，我们把交比的概念推广到复球面$\hat{\mathbf{C}}$上，也即允许在z_1,z_2,z_3,z_4之中可以有无穷远点∞。

我们定义

$$[z_1,z_2;z_3,\infty]=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

$$[z_1,z_2;\infty,z_4]=\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4},$$

$$[z_1,\infty;z_3,z_4]=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4},$$

$$[\infty,z_2;z_3,z_4]=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}.$$

读者无须记忆这些公式。这样定义含有∞的交比，恰好相当于无论∞出现在什么位置，只要先形式地将交比写成

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)},$$

然后把分子与分母中含有∞的项(分子与分母中一定各有一项)都换成1即可。例如$z_2=\infty$的情况，我们就把(z_2-z_4)与(z_2-z_3)同时换成1，便得到交比为$(z_1-z_3)/(z_1-z_4)$。

这样定义的合理性在于把含有∞的交比视作有穷点交比之极限，如

$$[z_1,z_2;z_3,\infty]=\lim_{z_4\to\infty}[z_1,z_2;z_3,z_4]$$

余此类推，请读者自己验证这些事实。

一个有趣的事情是值得注意的：那就是含有∞的四点的交比恰好就是其余三点(有穷点)在适当次序下的单比。这样，含有∞的四点的交比是实数的充要条件是三个有穷点在一条直线上。前面我们已经把直线看作是通过无穷远点的圆周。因此，定理3.1便可扩充为下列形式：

定理3.2 设z_1,z_2,z_3,z_4为复球面$\hat{\mathbf{C}}$上任意给定的四点。则它们落在复球面同一圆周上的充要条件是它们的交比为实数。

这里给定的四点允许其中有无穷远点∞，而复球面的圆周包含通常的直线。

练习1 设$z_1=0,z_2=1,z_3=i$。试证此三点决定的圆的参数方程式是：$z=1/[1-t(1+i)]$，$t\in\mathbf{R}$。

练习2 证明下列交比的性质：

$$[z_1+a,z_2+a;\ z_3+a,z_4+a]=[z_1,z_2;\ z_3,z_4], \tag{3.1}$$

$$[bz_1,bz_2;\ bz_3,bz_4]=[z_1,z_2;z_3,z_4], \tag{3.2}$$

$$[\bar{z}_1,\ \bar{z}_2;\ \bar{z}_3,\ \bar{z}_4]=\overline{[z_1,z_2;\ z_3,z_4]} \tag{3.3}$$

$$[z_1^{-1},\ z_2^{-1};\ z_3^{-1},\ z_4^{-1}]=[z_1,z_2;\ z_3,z_4], \tag{3.4}$$

其中$a,b\in\mathbf{C}$，$b\neq 0$。这里除了(3.4)之外，其它各式都是十分容易看出的。

§4 几何与变换

在我们引入分式线性变换之前，先讨论一下几何与变换的联系。

如果我要问你，什么是几何学？你或许会回答说，几何是研究图形性质的科学。这个回答是不错的。但是要再进一步追问一句，几何学研究图形的什么性质呢？或许你就难于回答了，或者认为这个问题本身没有道理。

其实几何学并不研究图形的一切性质。举例说，我们在同一张纸上画出两个全同的三角形，一个在左边，一个在右边。问你这两个三角形是否有相同的性质，你一定回答是的。再问何以见得呢，你就会把其中一个移动至另一个的位置上并使它们完全重合，以此来证实你的结论。

这里有两个问题值得思考：第一，三角形所在的位置我们并不关心，也就是说图形的位置这一属性，我们并不研究。第二，图形必须在移动的过程中保持某些性质不变，而几何学所要研究的正是这些性质。

德国著名数学家克莱因(Klein,1849—1925)在1872年的一次演说中提出了一个重要观点。那就是，每种几何都由一种变换群所刻划，并且每种几何所要做的实际上就是研究图形在这种变换下的不变性质。

克莱茵的这一基本观点后来以爱尔兰根纲领(Erlangen Programm)闻名于世。

按照克莱因的这一观点，我们在中学里所学习的几何(欧氏几何)是刚体运动(变换)刻划的几何，它要研究的是图形在刚体运动下的那些性质.这里所谓刚体运动是指这样一种运动，在运动中图形中任意两点的相对距离都不变。这样，在欧氏几何中，直线段的长度、两线段的夹角、三角形的面积等等都是要研究的图形性质。

现在来解释一下射影几何。

电影放映机的光束使银幕与电影胶片之间建立了一种点的对应关系，这种对应在数学上被称为透视投射。不过数学上的透视投射要更加一般，它允许银幕与胶片不平行的情况。这样，透视投射作为两个平面之间的变换，不仅改变了图形的大小，而且改变了它的形状。一个圆周可能被变成一个椭圆周。尽管在透视投射下图形的"形象"遭到了"歪曲"，但是它依然保持了图形的某些性质不变。比如它把直线变成直线，直线上四个点所形成的四条线段的交比不变，诸如此类。研究在透视投射下图形的不变性质的几何就叫射影几何。在射影几何里谈论三角形的面积及直线的夹角都是没有意义的事。

本章所讨论的分式线性变换是复球面上的一种变换。它保持任意四点的交比不变，把复球面上的圆周变成圆周(允许把通常的直线变为圆周),并且保持两相交圆弧的夹角不变。这类变换实际上刻划了复球面上的一种几何，不过我们没有给它起

一个专用名字罢了。

分式线性变换群的一个子群在单位圆内的作用恰好相当于双曲非欧几何的刚体运动（这一点将在下一章中得到具体的解释）。这便是为什么在讲非欧几何之前讲分式线性变换的原因。

§5 麦比乌斯变换

我们把复球面上的一个变换写成函数形式，$w=f(z)$。这里w是点z在变换f下的像。有时我们也写成：$z\mapsto f(z)$，这个意思是说点z对应到点$f(z)$。两种写法意思是一样的。

复球面$\widehat{\mathbb{C}}$上的一个变换$w=f(z)$被称作麦比乌斯变换，如果它是复球面$\widehat{\mathbb{C}}$上的一个一一变换和映满变换，且保持任意四点的交比不变，也即对于任意不同的四点$z_1,z_2,z_3,z_4\in\widehat{\mathbb{C}}$总有

$$[z_1,z_2;z_3,z_4]=[f(z_1),f(z_2);\ f(z_3),f(z_4)].$$

还是先举几个具体例子吧。

(i)平移变换：$z\longmapsto z+a$，这里$a\in\mathbb{C}$是一个常数。

根据§3中的(3.1)式，它是一个麦比乌斯变换。

复数加法的几何意义告诉我们，这个变换把复平面$\mathbb{C}$上的每一点z沿着一个固定方向平行移动了一个固定距离$|a|$，这个方向就是与复数a代表的方向平行的方向。见图1—5.1.

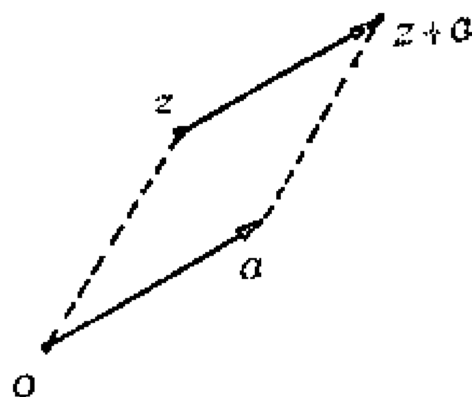


图1—5.1

平移变换在复球面上保持无穷远点∞不变。

(ii)相似变换：$z\longmapsto \rho z$，其中$\rho>0$是一个实数。

很明显这个变换把$\mathbb{C}$中的每个点到原点的距离放大到ρ倍($\rho<1$时是缩小到ρ倍)并保持复数的辐角不变。此外，它也把∞变成∞。

(3.2)式告诉我们相似变换是麦比乌斯变换。

(iii)旋转变换：$z\longmapsto e^{i\theta}z$，其中$\theta\in\mathbb{R}$是一个固定数。

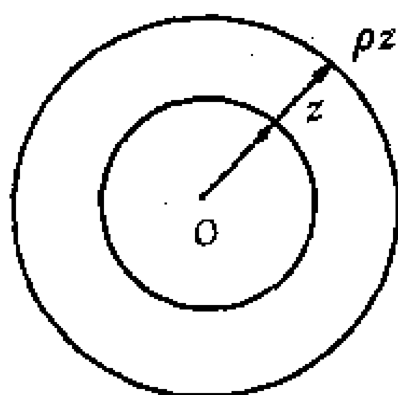


图1—5.2

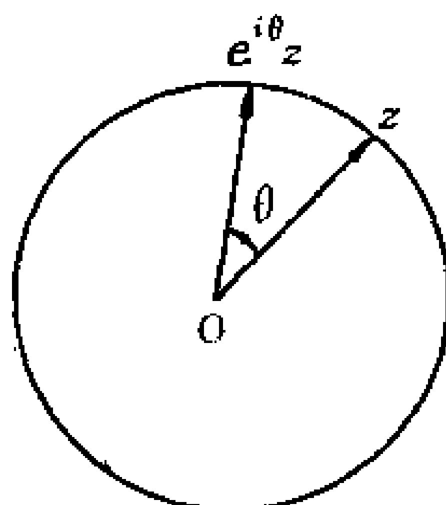


图1—5.3

显然，再次应用(3.2)式可知这也是一个麦比乌斯变换。它的几何意义是把$\mathbb{C}$上每点以原点为中心旋转θ角，并且保持无穷远点∞不动。

(iv)倒数变换：$z\longmapsto 1/z$

根据(3.4)它是麦比乌斯变换。

它的几何意义并不如前面三个那样一目了然。首先容易看出它把原点变为无穷远点，并把无穷远点变成原点。其次，不难看出它在单位圆周(即以原点为心、以1为半径的圆周)上把点z变成它的共轭点$\overline{z}$。这是因为单位圆周上的点z，都满足方程：$z\cdot\overline{z}=1$，即有$\overline{z}=1/z$。

设C是任意一个圆周，其方程为

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,$$

$$\alpha\neq 0,\quad \alpha,\gamma\in\mathbf{R},\alpha\gamma<|\beta|^2.$$

假如C经过原点$z=0$，那么$\gamma=0$。假如C不经过原点$z=0$，则$\gamma\neq 0$。这个圆周C经过倒数变换$w=1/z$之后变成

$$C':\qquad \gamma w\bar{w}+\beta w+\bar{\beta}\bar{w}+\alpha=0.$$

因此，当C经过原点时，C的像C'是一条直线。而当C不经过原点时，C'是一个通常的圆周，并且C'不经过原点（注意$\alpha\neq 0$）。

由此可见，倒数变换把通过原点的圆周变成直线，把不通过原点的圆周仍变成不通过原点的圆周。

练习1 试证明倒数变换把不经过原点的直线变成经过原点的圆周。

练习2 倒数变换把经过原点的直线变成什么？

前三种变换不用复数描述也是可以的。但是第iv种变换若不用复数描述就变得十分麻烦。

表达式十分简单的一个复数变换：$z\longmapsto 1/z$竟有这么丰富的几何内容，这使我们不能不感叹复数在几何中的巨大意义。

现在我们来给出麦比乌斯变换的一般表达式。

设$w=f(z)$是一个麦比乌斯变换。取$w_1=0,w_2=1,w_3=\infty$。根据f的映满性可知，存在三个点z_1,z_2,z_3，使得

$$w_1=f(z_1),\quad w_2=f(z_2),\quad w_3=f(z_3).$$

又由f的一一性可知，z_1,z_2,z_3是三个不同的点。再由麦比乌斯变换的定义，又推出对于任意一点$z\in\hat{\mathbf{C}}$（不同于z_1,z_2,z_3）都有

$$[z_1,z_2;\ z_3,z]=[0,1;\infty,w]. \qquad (5.1)$$

假设z_1,z_2,z_3中没有∞。这时，我们有

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z)}{(z_2-z_3)(z_1-z)}=\frac{1-w}{-w}.$$

从这里解出w即得

$$w=\frac{z_1-z}{(A-1)z+z_1-Az_2} \tag{5.2}$$

其中$A=[z_1,z_2,z_3]$。

假设$z_3=\infty$，这时从(5.1)有

$$\frac{z_2-z}{z_1-z}=\frac{1-w}{-w}$$

从这里解出w又得到

$$w=\frac{z_1-z}{z_1-z_2} \tag{5.3}$$

练习3 证明当$z_1=\infty$时

$$w=\frac{z_2-z_3}{z-z_3} \tag{5.4}$$

当$z_2=\infty$时，

$$w=\frac{z-z_1}{z-z_3}. \tag{5.5}$$

由此看出，不论是哪种情况，麦比乌斯变换$w=f(z)$总可以写成下列形式：

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{5.6}$$

其中a,b,c,d是$\mathbf{C}$中的四个数。

练习4 证明[illegible]

这里自然要问一个问题，任意一个形如(5.6)的变换是否是麦比乌斯变换？回答是肯定的，只要$ad-bc\neq0$。下面就来证明这一点。

若复球面上有两个变换：$w=f(z)$及$\zeta=g(w)$，则先作变换f再作变换g的复合变换记作$g\circ f$或$\zeta=g(f(z))$。

假若f与g都是麦比乌斯变换，则其复合变换$g\circ f$也是麦比乌斯变换。这是显而易见的。

任何一个形如(5.6)式的变换总可写成平移、旋转、相似、倒数四种变换之适当复合，条件是$ad-bc\neq0$。

事实上，若$c=0$，则$d\neq0$。这时(5.6)式可写成

$$w=Az+B\qquad\left(A=\frac{a}{d},\ B=\frac{b}{d}\right).$$

当$c\neq0$时，(5.6)式可写成

$$w=A+\frac{B}{z+C}\left(A=\frac{a}{c},\ B=(bc-ad)/c^2,\ C=\frac{d}{c}\right).$$

根据这些式子便很容易把这个变换写成上述四种变换的复合。请读者自行完成这一步骤。

我们已经知道了四种变换是麦比乌斯变换，这样它们的任何次序的复合变换也是麦比乌斯变换。因此，当$ad-bc\neq0$，分式线性变换(5.6)是麦比乌斯变换。

总之，我们证明了

定理5.1 任何一个麦比乌斯变换都是一个分式线性变换：

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq0),$$

反之亦然。

定理5.2 任何一个麦比乌斯变换都可写成平移变换、相似变换、旋转变换及倒数变换之复合。

今后我们把麦比乌斯变换称为分式线性变换，并假定今后凡提到分式线性变换时总意味着满足系数条件$ad-bc\neq 0$。

§6 保圆性

分式线性变换的一个重要性质就是把复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的圆周变成圆周。这一性质称为分式线性变换的保圆性。

要证明这一性质至少有两个途径。因为每个分式线性变换都可以分解为平移、相似、旋转及倒数变换的复合，所以只要说明这四种变换具有保圆性就足够了。上节中已经证明了倒数变换在复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的保圆性，而其它三种变换的保圆性在直观上是显然的。因此，分式线性变换的保圆性是容易接受的。证明分式线性变换的保圆性的另一途径是利用交比。分式线性变换保持交比不变，这就推出在复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的任意共圆的四点，经分式线性变换后其像一定也共圆。由此推出保圆性。下面的定理就是这样证明的。

定理6.1 分式线性变换把复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的任意一个圆周变成圆周。

证 设$w=f(z)$是一个分式线性变换。又设C是$\hat{\mathbb{C}}$上任意圆周，$C'=f(C)$是它的像。①要证明C'也是复球面上的一个圆周。

---

① 记号$f(C)$是说它是C在变换f下的像集合。

在C上任意取定三个点z_1,z_2,z_3，并在C上考虑一个动点z（不取z_1,z_2,z_3）。记$w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$，$w_3=f(z_3)$，则有$[z_1,z_2;\ z_3,z]=[w_1,w_2;\ w_3,f(z)]$。等式左边是实数，故其右边也是实数。这样，点$f(z)$便在$w_1,w_2,w_3$所确定的圆周上。设$\widetilde{C}$是$w_1,w_2,w_3$所决定的圆周。上述结论表明$C'=f(C)\subset\widetilde{C}$。现在只要证明$\widetilde{C}\subset C'$就够了。设$f^{-1}$是$f$的逆变换，则它也是一个分式线性变换。用$f^{-1}$替代$f$并再次应用已证的结论就有$f^{-1}(\widetilde{C})\subset C$。于是，$\widetilde{C}\subset f(C)=C'$。证毕。

§7 圆弧的交角——再论交比的几何意义

显然，分式线性变换把相交的圆周变成相交的圆周。人们自然要问：在交点处的交角是否变化？

要回答这个问题首先得定义什么是两个相交圆弧之交角。

复球面$\widehat{\mathbf{C}}$上任意两个相交的圆周C_1与C_2只有下述四种可能的情况：

(i)相交仅一点$z_0\in\mathbf{C}$。这时C_1与C_2是两个相切的普通圆周或者是相切的直线与圆周；

(ii)相交仅一点$z_0=\infty$。这时C_1与C_2是两条平行的直线；

(iii)相交于两点z_1与z_2，z_1与z_2全是有穷点；

(iv)相交于两点z_1与z_2，z_1与z_2之中有一点是∞。这时C_1与C_2是两相交的直线。

对于(i)与(ii)两种情况，我们统称为C_1与C_2相切于点z_0。这就是说，两条平行的直线被称为相切于∞。

相切或相交于∞时，我们不考虑在∞处的交角。我们只定义有穷的切点或交点处的交角。

设$z_0\in \mathbf{C}$是C_1与C_2的切点．又设$S_1\subset C_1$与$S_2\subset C_2$是以z_0为公共端点的两条弧（这里说弧，实际上包括直线段）。为了定义S_1与S_2在z_0点的夹角，我们自z_0点按照S_j的方向作C_j的一条切向量t_j，$j=1,2$。（直线段的切线就是它本身．）若t_1与t_2的方向相同，则定义S_1与S_2的夹角为零。若t_1与t_2的方向相反，则定义S_1与S_2的夹角为π。

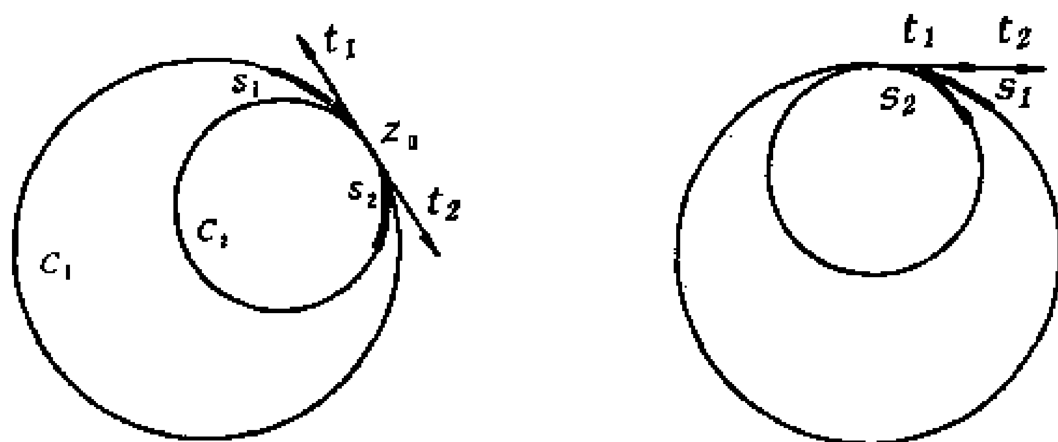


图1—7.1

设$z_1\in \mathbf{C}$是C_1与C_2的交点（不是切点）。又设$S_1\subset C_1$与$S_2\subset C_1$是任意给定的以z_1为公共端点的两条弧。像上面一样考虑两条切向量t_1与t_2。我们定义t_1与t_2之间所夹的劣角θ为S_1与S_2在z_1处的交角，并规定当t_2以z_1为心在劣角内旋转至t_1的位置时，旋转方向为逆时针方向则θ取正值，否则θ取负值。

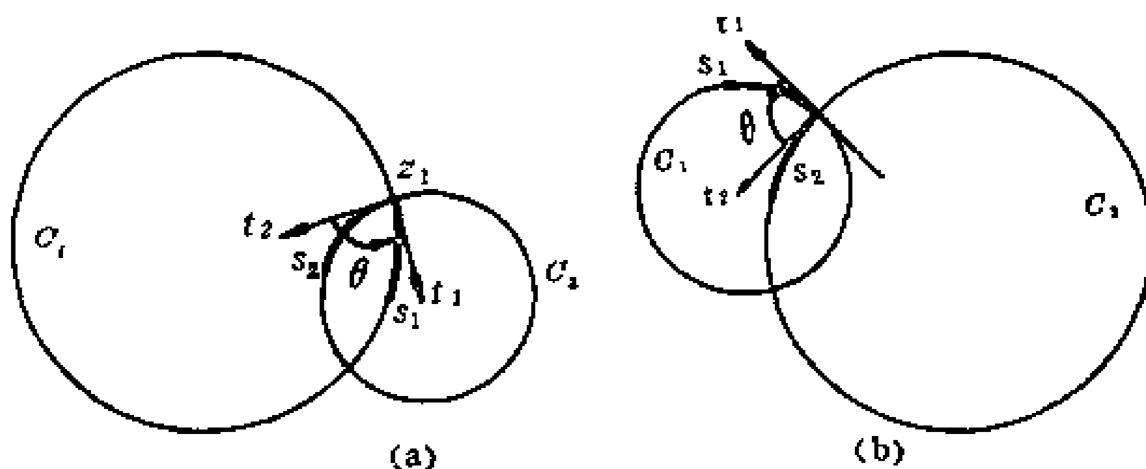


图1—7.2

用什么量来描述两个相交弧的交角呢?我们又想到了交比.我们有下列引理:

引理7.1 设C_1与C_2相交于z_1与z_2，其中z_1是有穷点. 又设$S_1\subset C_1$与$S_2\subset C_2$是任意给定的以z_1为端点的两条弧. 则S_1与S_2在z_1处的交角

$$\theta=\arg[z_1,z_2;\ \zeta_1,\zeta_2].$$

其中ζ_1与ζ_2分别是S_1与S_2的另一个端点(即非z_1的端点).

证 当$z_2=\infty$时，C_1与C_2是两条直线，且

$$[z_1,z_2;\ \zeta_1,\zeta_2]=\frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_2-z_1}$$

根据我们对两个相交弧的交角的定义及复数除法的几何意义，这时引理显然成立，见图1—7.3.

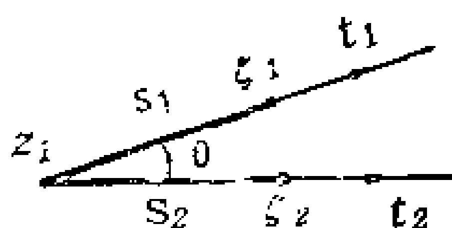


图1—7.3

对于$z_2\neq\infty$的情况，C_1与C_2可能都是通常的圆周，也可能一个是通常的圆周，另一个是直线. 这里我们只讨论两个都是圆周的情形. 至于后一种情形，证明类似并比前一种情形更简单，故留给读者完成.

设C_1与C_2都是通常的圆周，令

$$\rho_j=|[z_1,z_2;\zeta_j]|,\quad \theta_j=\arg[z_1,z_2;\zeta_j]$$

其中$j=1,2$. 这时，我们有

$$[z_1,z_2;\zeta_1,\ \zeta_2]=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (7.1)$$

若ζ_1与ζ_2落在z_1与z_2的连线的同侧，则θ_1与θ_2同号. 否则θ_1与θ_2异号. 图1—7.4(a)与(b)分别表示了这两种情况.

这两种情况的讨论完全类似，我们只讨论θ_1与θ_2同号的情况而略去它们异号的情况.

当θ_1与θ_2同号时，$|\theta_1-\theta_2|<\pi$(因为$|\theta_1|$与$|\theta_2|$的每一

个都小于π)。故根据我们对arg取值范围的约定及(7.1)式，我们有

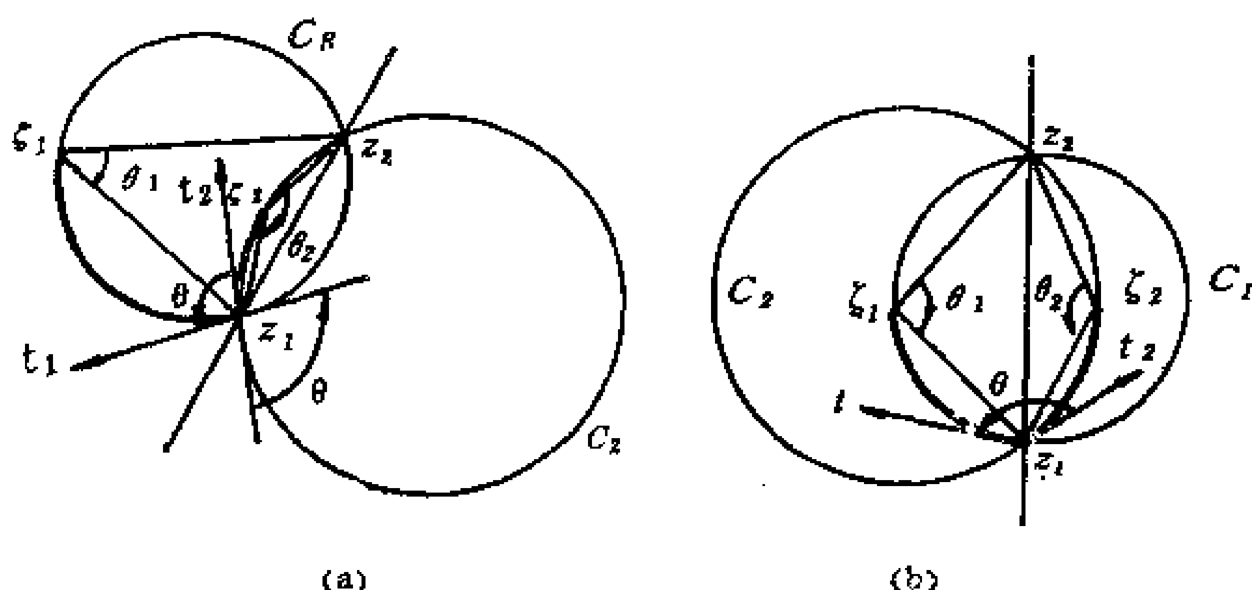


图1—7.4

$$\arg[z_1,z_2;\ \zeta_1,\zeta_2]=\theta_1-\theta_2. \tag{7.2}$$

令θ是S_1与S_2在z_1处的夹角。根据平面几何中圆周角等于对应的弦切角这一定理，不难证明

$$|\theta|=|\theta_1-\theta_2|.$$

注意到我们对圆弧夹角的符号的约定，利用图形并区别θ_1与θ_2都是正的和θ_1与θ_2都是负的情况，可以分别验证

$$\theta=\theta_1-\theta_2. \tag{7.3}$$

(注：图1—7.4(a)仅画出了θ_1与θ_2都是负的且$|\theta_2|>|\theta_1|$的情况，这时$\theta_1-\theta_2>0$，而t_2旋转至t_1的方向是逆时针的，也即$\theta>0$。因此(7.3)成立。其它情况类似验证。)由(7.2)与(7.3)即推出引理。证毕。

这个引理是证明分式线性变换保角性的基础。

通常分式线性变换的保角性是基于解析函数论证明的。现在有了这个引理就可以省去高等数学的理论而得到一个完全初等的证明。

这个引理还有其独立的意义。它给我们进一步解释了交比的几何意义。

设$\zeta_1, \zeta_2, z_1, z_2$是复球面上任意不共圆的四点，$z_1 \neq \infty$。过$\zeta_1, z_1, z_2$及$\zeta_2$，$z_1, z_2$分别作圆周$C_1$与$C_2$。这时交比$[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2]$的辐角就是$C_1$与$C_2$在$z_1$处的交角。（见定理8.1的注）

前面我们已经知道，四点共圆时交比的辐角为0或π。现在又补充了四点不共圆时交比辐角的几何解释。这样，我们对交比的辐角的几何意义有了完整的了解。

我们再次看到交比这个十分简单的量却提供了众多的几何信息。

§8 保角性

有了上节的引理，分式线性变换的保角性就是十分自然的事了。

定理8.1 设$w=f(z)$是一个分式线性变换，C_1与C_2是任意两个相交的圆周，并且其中一个有穷交点的像也是有穷点。则C_1与C_2在该交点的交角等于$f(C_1)$与$f(C_2)$在相应交点的交角。

注 这里我们使用了C_1与C_2的交角这一叙述。这是为了叙述简单。实际上只有自交点处在两圆周上各取一段弧后才能谈论其交角。定理的意思就是保持弧的夹角不变。

证 设z_1为C_1与C_2的有穷交点，且$z_1'=f(z_1)$也是有穷点。以z_1为端点在C_1与C_2上各取一段弧S_1与S_2，它们的另一端点分别是ζ_1与ζ_2。又设z_2为C_1与C_2的另一交点。则S_1与S_2在z_1处

的交角为$\arg[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2]$。

设 $C'_j = f(C_j)$，$\zeta'_j = f(\zeta_j)$，$S'_j = f(S_j)$，$j=1,2$；$z'_2 = f(z_2)$。不难看出，z'_1与z'_2是C'_1与C'_2的两个交点且ζ'_1与ζ'_2分别是S'_1与S'_2的端点。这样S'_1与S'_2在z'_1处的交角为$\arg[z'_1, z'_2; \zeta'_1, \zeta'_2]$。

分式线性变换保持交比不变，故有

$$\arg[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2] = \arg[z'_1, z'_2; \zeta'_1, \zeta'_2]$$

证毕。

推论 分式线性变换将两个正交的圆周变成正交的圆周。

练习题 设z_0是单位圆$U=\{z: |z|<1\}$内的任意一点。试证明分式线性变换

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

保持单位圆周不变，且把与单位圆周正交的圆周变成与单位圆周正交的圆周。

提示：为了证明上述变换保持单位圆周不变，应当证明：当z在单位圆周上时，

$$w\bar{w} = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}} = 1, \qquad (8.1)$$

而这一点可由$\bar{z} = 1/z$推出。

§9 对称与反演

在平面上一点关于直线的对称这是大家所熟悉的。现在我们来研究关于圆周的对称。

设C是一个圆周，中心为z_0，半径为r。对于任意一点$z\neq z_0$，我们考虑自z_0出发的并通过z点的半直线l。定义点z关于圆周C的对称点z^*是l上的这样一点，它满足

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=r^2 \tag{9.1}$$

此外，我们约定z_0的对称点$z_0^*=\infty$，而∞的对称点为z_0。

显然，若点z关于C的对称点为z^*，则z^*关于C的对称点为z。

读者或许会疑惑，为什么要这样来定义对称呢？

的确，关于直线的对称是再自然不过了。而现在这种关于圆周的对称似乎带有相当大的人为性。

其实，现在定义的这种关于圆周的对称是关于直线对称的一种推广，它们的许多基本性质是相同的。

现在我们先对关于圆周对称的性质作点具体了解：根据定义，当$z\in C$时，则$z^*=z$。当z在C的内部时，z^*在C的外部。另外，z与z^*的连线与C垂直。所有这些性质均与关于直线对称的情况类似。

对称实际上是一种变换，即把点z对应到它的对称点z^*。关于直线的对称变换是保持距离的，也即

$$|z_1-z_2|=|z_1^*-z_2^*|$$

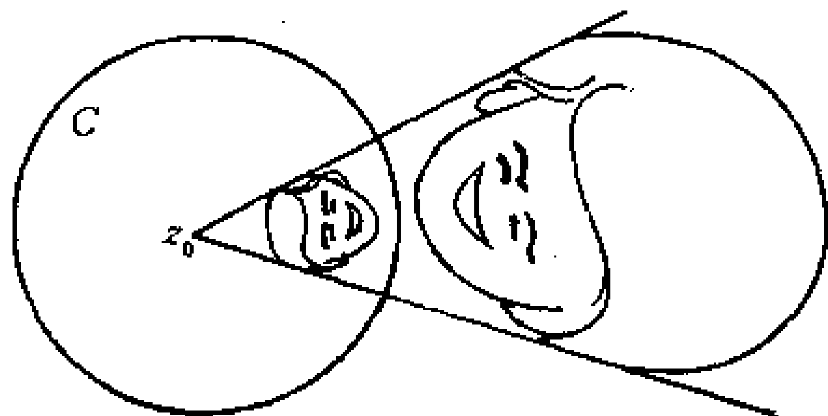


图1—9.1

这样，关于直线的对称变换保持了图形的大小。但是，关于圆周对称这一条不成立。在作关于圆周对称变换时，图形的大小与形状都遭到破坏。如果说，关于直线的对称变换是照镜子的话，那么关于圆周的对称变换就是照哈哈镜了。(注：这只是一个比喻。我们的上述定义并不符合照圆面镜光学原理的要求。)

尽管如此，关于直线的对称与关于圆周的对称在下述特征性质上是一致的：设z^*是点z关于圆周C(直线L)的对称点，且$z^* \neq z$。则过z^*与z的任意一个圆周或直线均垂直于C(或L)。这一性质在复球面上可用统一的语言叙述。

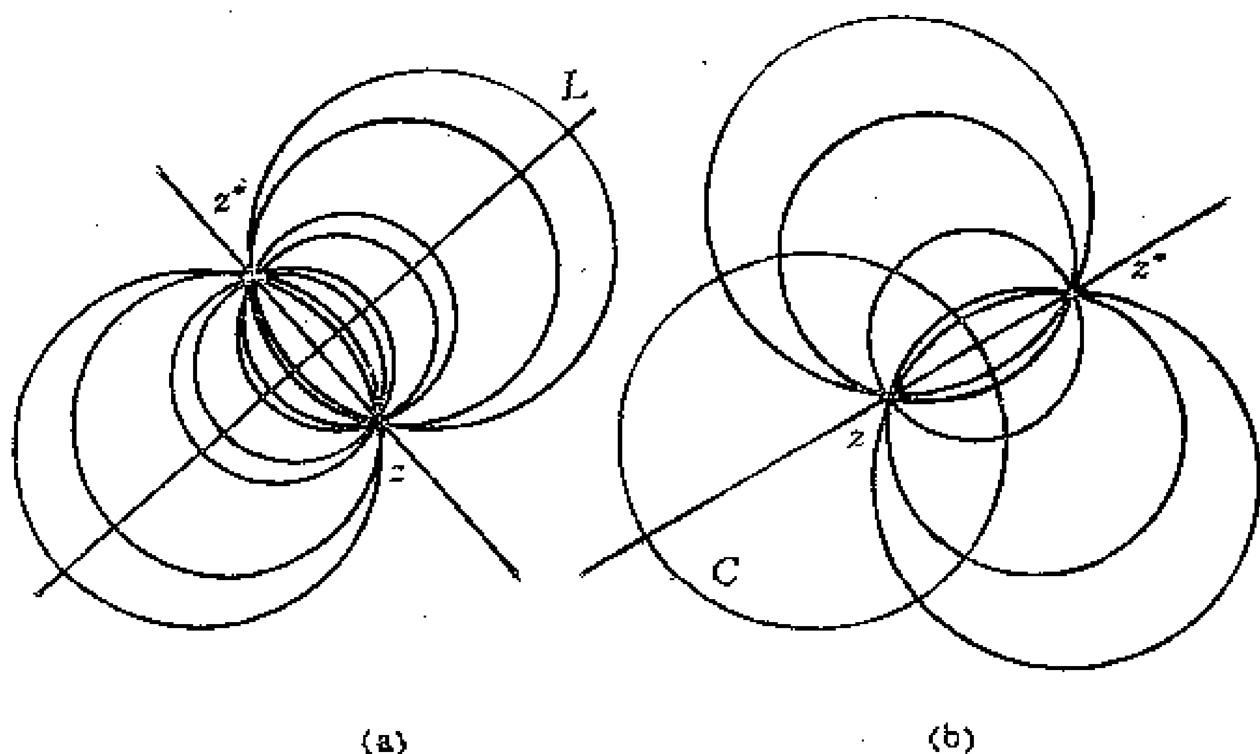


图1—9.2

定理9.1 设C是复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的一个圆周。又设z^*是点z关于C的对称点，且$z^* \neq z$。则过z与z^*的任意一个圆周均与C正交。

证 我们只对C是通常圆周而z与z^*均不是圆心的情况加以证明就足够了。其它情况定理结论显然成立。

设C的半径为r，圆心为z_0，$z\neq z_0, z^*\neq z_0$。又设C_1是过z与z^*的任意一个圆周，交C于点ζ_1与ζ_2。这样，

$$|\zeta_1-z_0|^2=r^2=|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|.$$

根据平面几何的定理，这表明z_0到ζ_1的连线与C_1相切。但此连线是C的半径，于是C与C_1在ζ_1处正交。同理，C与C_1在ζ_2处也正交。证毕。

定理9.2 设C是复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的一个圆周。又设z^*是点z关于C的对称点，且$z^*\neq z$。则过z的且与C正交的圆周一定通过z^*。

证明与上定理类似。

现在我们看到关于直线对称与关于圆周对称是可以统一的了。这种统一性除了上面的两个定理之外，还可以从z与z^*所满足的方程式看出。

设z^*是点z关于圆周$C=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r\}$的对称点。则它们应满足方程：$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=r^2$。注意到$z, z^*, z_0$在同一线段上，故有

$$(\bar{z}-\bar{z}_0)(z^*-z_0)=r^2$$

也即

$$z^*\bar{z}-\bar{z}_0z^*-z_0\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0.$$

上述方程两端同乘以实数$a\neq 0$，并令$\beta=-az_0$，$\gamma=a(|z_0|^2-r^2)$则有

$$az^*\bar{z}+\bar{\beta}z^*+\beta\bar{z}+\gamma=0, \qquad (9.2)$$

$$a,\gamma\in\mathbb{R},\ a\gamma<|\beta|^2.$$

设L是一条直线，其方程式为$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0, \gamma\in\mathbb{R}$，$\beta\neq 0$。若$z^*$是点$z$关于$L$的对称点，则$z$与$z^*$满足

$$\bar{\beta}z^*+\beta\bar{z}+\gamma=0, \qquad (9.3)$$

$\gamma\in\boldsymbol{R}$, $\beta\neq 0$。

此式证明留给读者。由(9.2)及(9.3)立即推出。

定理9.3 设C是复球面$\hat{\mathbb{C}}$上的一个圆周，其方程为

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0, \qquad (9.4)$$

$$\alpha,\gamma\in\boldsymbol{R},\alpha\gamma<|\beta|^2.$$

若z^*是点z关于C的对称点，则z与z^*满足方程

$$\alpha z^*\bar{z}+\bar{\beta}z^*+\beta\bar{z}+\gamma=0.$$

这就是说，只要将原方程中的z换成z^*，而$\bar{z}$不动，就得到z与z^*所满足的方程。

在复球面$\hat{\mathbb{C}}$上取定一个圆周C。用z^*表示点z关于C的对称点。变换$z\longmapsto z^*$称为**对称变换**或**反演变换**。

根据定理9.3，若C的方程为(9.4)，则关于C的反演变换有下列表达式：

$$z^*=-\frac{\beta\bar{z}+\gamma}{\alpha\bar{z}+\bar{\beta}}(\alpha,\gamma\in\boldsymbol{R},\ \alpha\gamma<|\beta|^2) \qquad (9.5)$$

从这个表达式中可以看出反演变换是一个分式线性变换的共轭。令

$$w=f(z)=-\frac{\bar{\beta}z+\gamma}{\alpha z+\beta}.$$

那么，$z^*=\overline{f(z)}$。

利用分式线性变换的保交比性，并注意交比的性质(3.3)，我们就得到反演变换把任意四点的交比变成它的共轭：

$$[z_1^*,z_2^*;\ z_3^*,z_4^*]=\overline{[z_1,z_2;\ z_3,z_4]}.$$

由此推出：反演变换将复球面上的圆周变成圆周。

又可推出：反演变换保持相交圆弧的夹角绝对值不变但符

号相反。

可见，尽管反演变换将图形的形状与大小都有相当变化，但没有过大的扭曲。一个圆脸的孩子在这个“哈哈镜”里仍是圆脸的。

最后，我们指出任何一个分式线性变换都可写成偶数个反演变换的复合(见本章末习题)。

§10 分式线性变换的保对称性

由分式线性变换的保圆性及保角性立即推出它的保对称性。

定理10.1 设$w=f(z)$是一个分式线性变换。又设C是复球面$\widehat{\mathbb{C}}$上的一个圆周，z_0^*是点z_0关于C的对称点。则点$w_0^*=f(z_0^*)$是点$w_0=f(z_0)$关于$f(C)$的对称点。

粗糙一点说，分式线性变换把两个对称点变成两个对称点。不过不是关于同一个圆周，这一点请注意。

证 设C_1是通过z_0与z_0^*的任意一个圆周，则C_1与C正交。再由f的保圆性及保角性可知，$f(C_1)$与$f(C)$是两正交的圆周，且$f(C_1)$通过w_0与w_0^*。再取C_2是通过z_0与z_0^*的另一个圆周，则$f(C_2)$与$f(C)$正交，且$f(C_2)$也通过w_0与w_0^*。根据定理9.2，过w_0的任意一个与$f(C)$正交的圆周必过w_0的对称点。那么w_0关于$f(C)$的对称点必在$f(C_1)$与$f(C_2)$之上，这只有是w_0^*。证毕。

§11 分式线性变换的分类

到目前为止，我们对分式线性变换的了解仍是不具体的。要想得到更进一步的具体了解，这只有分类加以说明。

设$w=f(z)$是一个分式线性变换。若点$z_0\in\hat{\mathbb{C}}$使得$f(z_0)=z_0$，则称z_0是f的一个不动点。

在平移变换中无穷远点∞是唯一不动点。在相似变换与旋转变换中0与∞都是不动点。

练习1 由分式线性变换保持交比不变推出，若f有三个不动点，则f是恒等变换，也即$f(z)\equiv z$。

可见，非恒等的分式线性变换至多有两个不动点。

若圆周C在f的变换下不变，也即$f(C)=C$，则称C为f的不变圆周。注意：C是f的不变圆周并不意味着它上面的每点不变，只是作为集合不变。

相似变换的不变圆周是通过原点的任意一条直线。旋转变换的不变圆周是以原点为心的圆周。

练习2 平移变换$z\longmapsto z+l$的不变圆周是满足方程

$$(\overline{li})z+(li)\bar{z}+\gamma=0,\ \gamma\in\mathbb{R}$$

的直线。这个方程所代表的直线实际上是平行于l所表示的向量的直线。

为了研究分式线性变换的几何特征，我们须要引入共轭变

换的概念。设$w=f(z)$是一个分式线性变换。又设$\zeta=h(z)$是另一个分式线性变换。现在，我们要把变换$z\longmapsto f(z)$用ζ表示。设h^{-1}表示h的逆变换，那么$z=h^{-1}(\zeta)$，变换$z\longmapsto f(z)$即可写成：$h^{-1}(\zeta)\longmapsto f(h^{-1}(\zeta))$，也即

$$\zeta\longmapsto h(f(h^{-1}(\zeta)))。$$

复合变换$h\circ f\circ h^{-1}$称为f的**共轭变换**。

若z_0是f的不动点，则共轭变换$g=h\circ f\circ h^{-1}$以$\zeta_0=h(z_0)$为不动点。反过来，若ζ_0是g的不动点，则$z_0=h^{-1}(\zeta_0)$是f的不动点。由此可见，f与其共轭变换有相同个数的不动点。

对于f的不变圆周也有类似的结论。

设$w=f(z)$是一个非恒等变换且只有一个不动点z_0。取h是这样一个变换，它把z_0变为∞。这时$g=h\circ f\circ h^{-1}$是一个非恒等变换且只有一个不动点∞。

设$g(\zeta)=(a\zeta+b)/(c\zeta+d)$ $(ad-bc\neq0)$。$g(\infty)=\infty$意味着$c=0$，也即$g(\zeta)=(a\zeta+b)/d$。

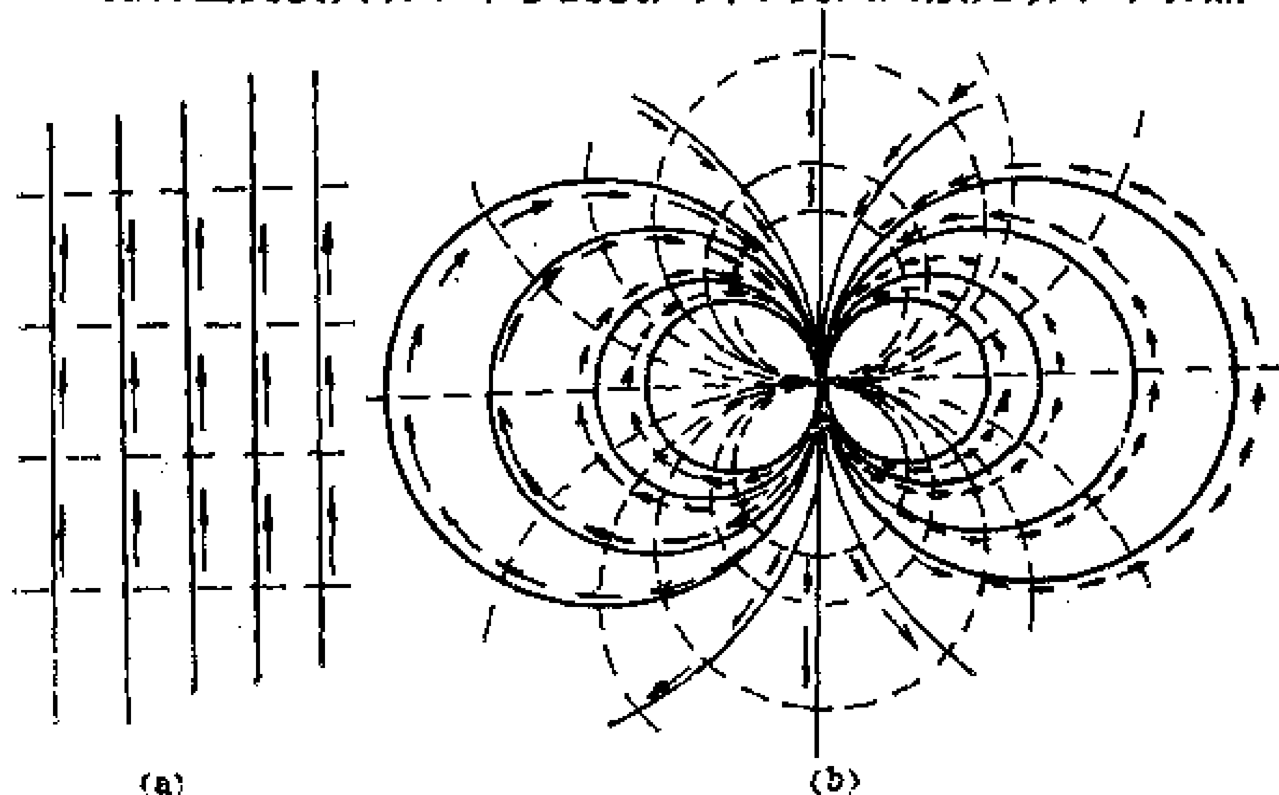
练习3 $g(\zeta)=A\zeta+B$若只有一个不动点∞，则$A=1$，$B\neq0$。

这样，$g(\zeta)=\zeta+l(l=b/d\neq0)$，即$f$共轭于一个平移变换。我们已经知道，$g$的不变圆周是一族平行直线(在复球面上看是一族切于无穷远点的圆周)。因此，这族平行直线在h^{-1}下的像就是f的不变圆周族。显然，f的这一不变圆周族是由切于z_0的一族圆周组成。

图1—11.1(a)与(b)分别画出g与f的不变圆周族（实线）。其中的虚线圆周族是垂直于不变圆周族的圆周族。在g或f的作用下，实线圆周不变，而虚线圆周从一个变成另一个。

只有一个不动点的分式线性变换被称为抛物型变换。

抛物型变换共轭于平移变换，其不变圆周族是切于不动点



(a) (b)

图1—11.1

的圆周族。

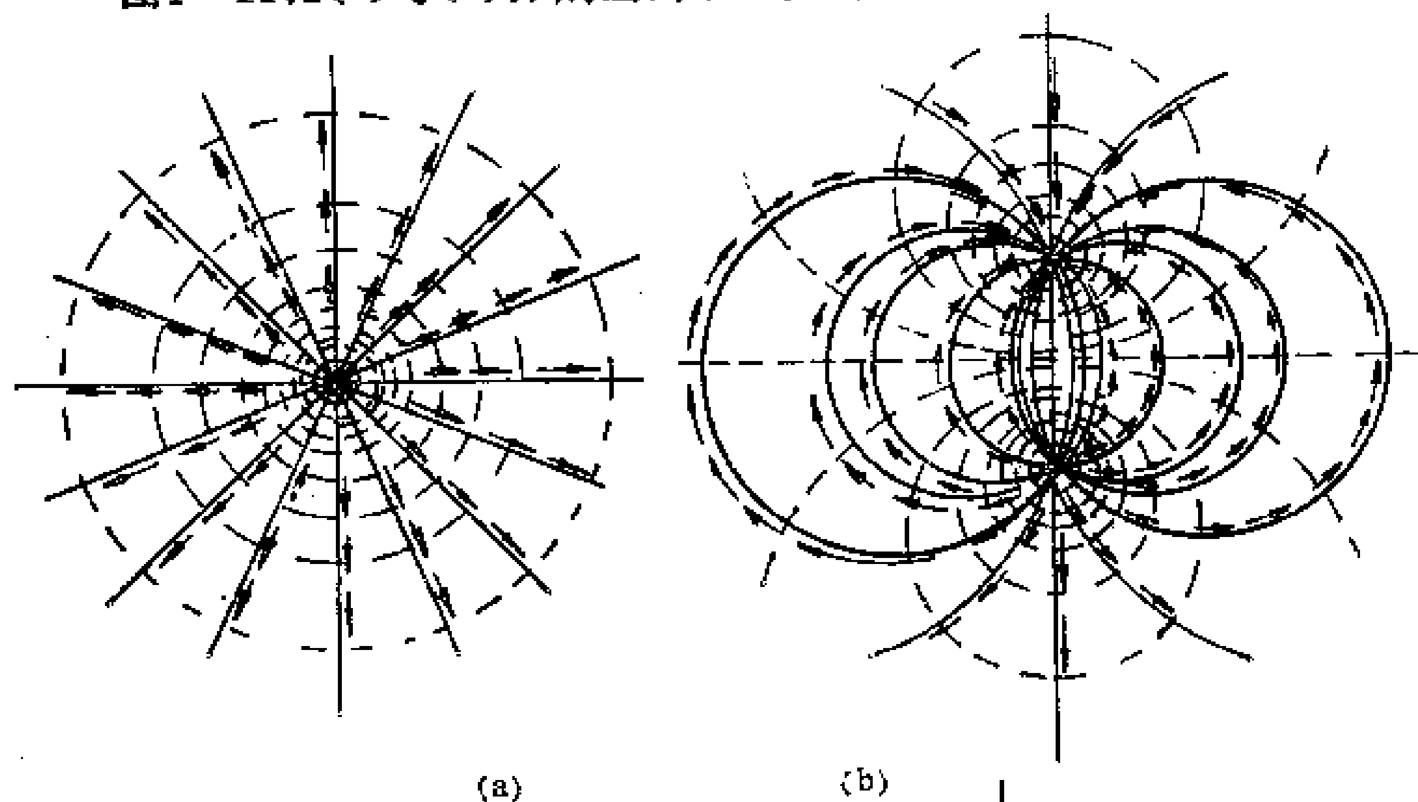
现在讨论有两个不动点的分式线性变换。设$w=f(z)$是恰有两个不动点的分式线性变换，z_1与z_2为其不动点。这时取h是一个分式线性变换，$h(z_1)=0$，$h(z_2)=\infty$。我们考虑共轭变换$g=h\circ f\circ h^{-1}$。则g以0与∞为不动点。这时g只有下列形式：
$g(\zeta)=A\zeta(A\neq 1$，否则g是恒等变换)。

若A是一个正实数，也即f共轭于相似变换，则称f是双曲型变换。若$A=e^{i\theta}(\theta\neq 2k\pi, k$为整数)，也即$f$共轭于一个旋转变换，则称$f$为椭圆型变换。其它情况，$f$被称为斜驶型变换。本书中将不涉及斜驶型变换，故不讨论它。

当f是双曲型变换时，g是相似变换。任何一个通过g的不动点(即0与∞)的圆周都是g的不变圆周。因此，通过f的不动点

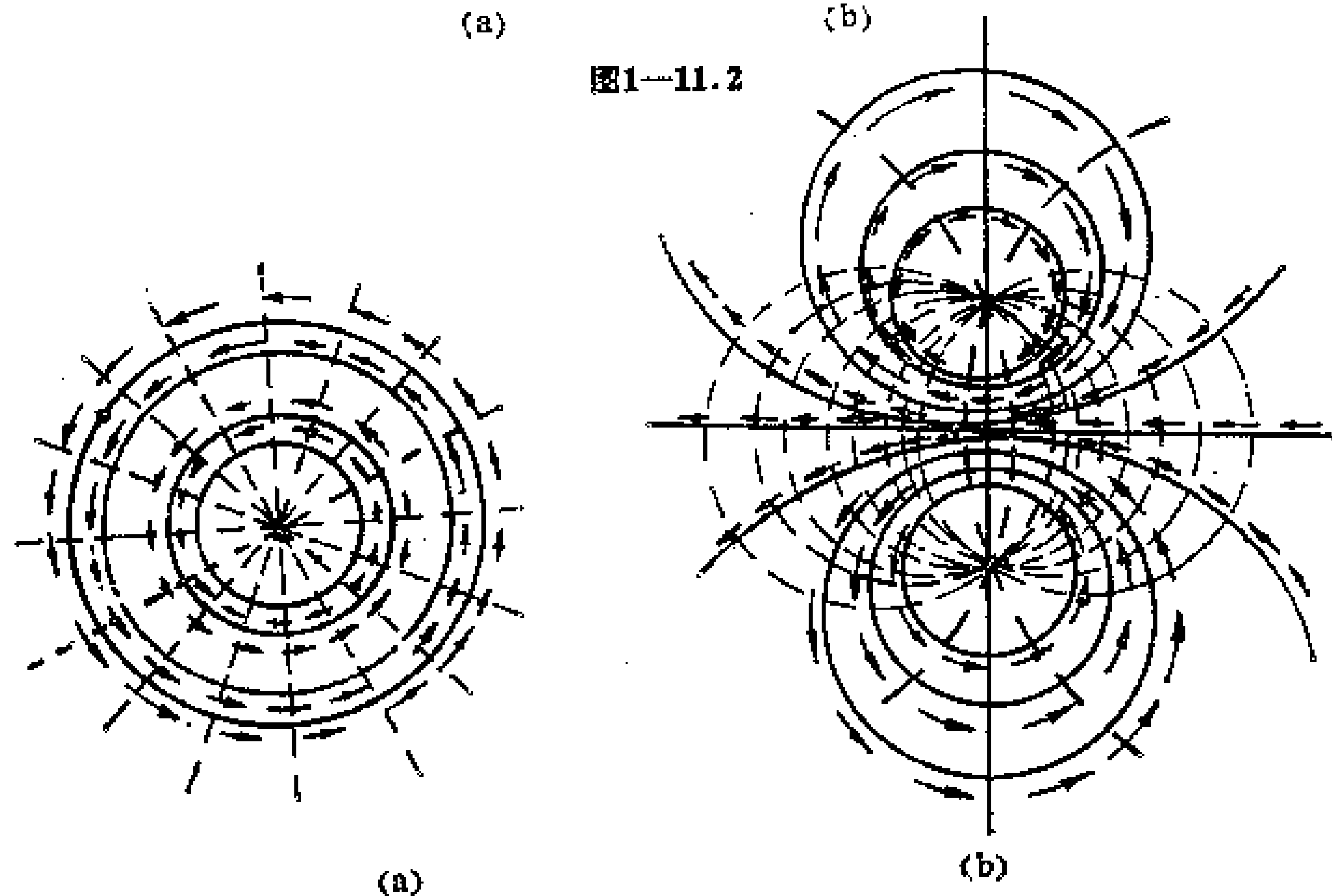
z_1与z_2的任意一个圆周都是f的不变圆周。

图1—11.2(a)与(b)分别画出了g与f的不变圆周族，其中虚



(a) (b)

图1—11.2



(a) (b)

图1—11.3

线圆周族与前面意义相同。

当f是椭圆型变换时，g是旋转变换。像前面一样，可以由g的不变圆周族(以原点为心的圆周族)决定f的不变圆周族。注意到g的两个不动点(即0与∞)关于其不变圆周对称，所以f的不变圆周也使得其不动点相互对称(分式线性变换保持对称性)，见图1—11.3。

这样，我们对每类分式线变换有了较具体的了解。作为练习，请读者以倒数变换为例，求出它的不动点，以及把不动点变为0及∞的变换，然后判断倒数变换的类型。

习　　题

本书在每章之末都列出了一些习题。它们难易程度不一，但一般说来并不十分简单。所以读者若一时做不出也没有关系，并不说明你没有学好，也不说明你脑子笨。或许放几天再做就做出来了，这是常有的事。

另外，这些题目本身往往又是对本章内容的重要补充。因此，希望读者不仅努力去做这些题目，而且还要多思考题目本身的意义。

1. 证明方程

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\quad \alpha,\gamma\in\mathbb{R},\ |\beta|^2>\alpha\cdot\gamma$$

在$\alpha\neq0$时代表复平面$\mathbb{C}$上的一个圆周，并求出其中心及半径。

2. 设在复球面$\hat{\mathbb{C}}$上给定两个圆周：

$$C_j:\ \alpha_j z\bar{z}+\bar{\beta}_j z+\beta_j\bar{z}+\gamma_j=0,\quad \alpha_j,\ \gamma_j\in\mathbb{R},\ |\beta_j|^2>\alpha_j\cdot\gamma_j$$
$$j=1,2.$$

考虑圆周族

$$\Gamma=\{\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0;\ \alpha=s\alpha_1+t\alpha_2,\ \beta=s\beta_1+t\beta_2$$
$$\gamma=s\gamma_1+t\gamma_2,\ s,t\in\mathbb{R}\}.$$

试证明当C_1与C_2相交于两点时，Γ中的每一个圆周通过此两点(也即此两点是Γ中所有圆周之公共交点)，当C_1与C_2相切于一点时，则Γ中的每

一个圆周也与C_1、C_2相切于该点；当C_1与C_2不相交也不相切时，Γ中任意两个圆均不相交也不相切。*)

本题中的圆周集合Γ被称为由圆周C_1与C_2决定的圆周束。

3． 设C_1与C_2是分式线性变换$w=f(z)$的两个不同的不变圆周。证明C_1与C_2所决定的圆周束Γ中的任意一个圆周都是$w=f(z)$的不变圆周。

若圆周束Γ中全体圆周有两个公共交点，则Γ被称为双曲型的。若Γ中全体圆周均相切一点，则Γ被称为抛物型的。若Γ中的任意两个圆周均不相交也不相切，则Γ被称为椭圆型的。试问$w=f(z)$的不变圆周束的类型与分式线性变换f的类型有何关系？

4． 在复球面$\hat{C}$上给定两个相交于两点的圆周：

$$C_j:\ \alpha_j z\bar{z}+\bar{\beta}_j z+\beta_j\bar{z}+\gamma_j=0,$$

$$\alpha_j,\gamma_j\in\mathbf{R},\ |\beta_j|^2>\alpha_j\cdot\gamma_j,\ j=1,2.$$

试证明它们相互正交的充要条件是：$\beta_1\bar{\beta}_2+\bar{\beta}_1\beta_2=\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$.
（提示：当C_1与C_2都是直线时，利用直线方程的系数的几何解释。当C_1与C_2中一个是直线而另一个是圆周时考虑圆心是否在直线之上。当C_1与C_2都是圆周时，考查圆心距与两个半径之间的关系。）

5． 在复球面$\hat{C}$上给定两个圆周

$$C_j:\ \alpha_j z\bar{z}+\bar{\beta}_j z+\beta_j\bar{z}+\gamma_j=0,\ \ \alpha_j,\gamma_j\in\mathbf{R},\ |\beta_j|^2>\alpha_j\cdot\gamma_j,$$

$$j=1,2.$$

我们称集合

$$\Gamma^*=\{\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0;\ \beta\bar{\beta}_j+\bar{\beta}\beta_j=\alpha\gamma_j+\alpha_j\gamma,\ j=1,2\}$$

为C_1与C_2的共轭圆周束。试证明Γ^*中每一个圆周都与C_1、C_2所决定的圆周束Γ中的任意一个圆周正交。另外，若Γ是抛物型的，则Γ^*也是抛物型的；若Γ是椭圆型的，则Γ^*是双曲型的；反之若Γ是双曲型的，则Γ^*是椭圆型的。

6． 在复球面$\hat{C}$上任给两个圆周C_1与C_2。则必定存在一个分式线性变换$w=f(z)$，使得C_1与C_2所决定的圆周束中每一个圆周都是f的不变圆周，而C_1与C_2的共轭圆周束中每一个圆周在f的变换下变为该束中的另一个圆周。（提示：证明此命题时可能要用到下一题。）

---

*) 注：此题需要行列式或线性方程组知识。

7. 设C_1与C_2是复球面$\hat{\mathbf{C}}$上的两个不相交也不相切的圆周.证明存在两点，它们关于C_1与C_2都是互为对称的，并且它们关于C_1与C_2所决定的圆周束中的任意一个圆周都是互为对称的.

8. 若C_1与C_2是$\hat{\mathbf{C}}$上任意给定的两个不相交也不相切的圆周,则存在一个分式线性变换将它们变成同心圆周.

9. 证明下列结论：平移变换t_l：$z\mapsto z+l$是先对直线：$\bar{l}z+l\bar{z}=0$作反演变换再复合以对直线：$\bar{l}z+l\bar{z}=b\bar{b}$作反演变换.拉伸变换$s_\rho$：$z\mapsto \rho z(\rho>0)$是下面两个反演变换之复合：先对单位圆周作反演变换，再作关于$|z|=\sqrt{\rho}$的反演变换.旋转变换r_θ：$z\mapsto e^{i\theta}z$是如下两个反演变换的复合：先对实轴反演(即取共轭)然后对直线$\{z; z=re^{i\theta/2}, r\in\mathbf{R}\}$作反演.倒数变换$z\mapsto 1/z$是先对单位圆周作反演再对实轴作反演.(这一题告诉我们任何分式线性变换都是偶数个反演之复合.)

10. 设L是满足下列方程的直线：

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0,\gamma\in\mathbf{R},\beta\neq 0.$$

试证明L的方向与β所代表的方向垂直.

·试画出上题中直线$\bar{l}z+l\bar{z}=0$及$\bar{l}z+l\bar{z}=b\bar{b}$的图形.

11. 设$f(z)=(z-z_0)/(1-\bar{z}_0z)$. 试证明当$z_0\in\mathbf{R}$,$0<|z_0|<1$时$f$是一个双曲型变换，当$z_0=(1+i)/2$时$f$是抛物型变换.

12. 判别下列分式线性变换之类型：

(i)$w=-1/(z+2)$；(ii) $w=(z+1-i)/i$；(iii)$w=(z-1)/2$.

13. 设$f(z)=az+b(a\neq 0)$.试证明f是抛物型变换的充要条件是$a=1,b\neq 0$，f是双曲型变换的充要条件是$a>0$是实数且$a\neq 1$. f是椭圆型变换的充要条件是$|a|=1$且$a\neq 1$.

14. 令$w=f(z)$是形如下式的分式线性变换：

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0,\ c\neq 0).$$

设z_1是f的一个不动点.取$h(z)=1/(z-z_1)$，试证明f的共轭变换$g=h\circ f\circ h^{-1}$是

$$g(\zeta)=A\zeta+B,\ A=(cz_1+d)/(a-cz_1),$$
$$B=c/(a-cz_1).$$

15. 设$f(z)$如上题所设，并进一步假定$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，试证明f是双曲型变换之充要条件是

$$(a+d)^2>4(ad-bc)>0。$$

f是椭圆型变换之充要条件是

$$(a+d)^2<4(ad-bc)。$$

（提示：利用14及13题。）

16. 设$w=f(z)$是一个双曲型变换，且共轭于拉伸变换

$$\zeta\mapsto\rho\zeta\quad(\rho>1),$$

则称ρ是f的**乘子**（注意我们要求$\rho>1$）。显然，每一个双曲型变换都有一个唯一确定的乘子（只要取h将f的排斥型不动点变为0而吸收型不动点变为∞，那么共轭变换$g=h\circ f\circ h^{-1}$就符合要求。）

若$w=f(z)$是双曲型变换，且其系数$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则f的乘子

$$\rho=\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}},\quad 当a+d>0时；$$

$$\rho=\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}},\quad 当a+d<0时。$$

（注：乘子的概念是有用的。但这些公式却用处不大。读者无须记着它们。）

17. 设$w=f(z)$是任意一个双曲型分式线性变换，z_1与z_2分别是它的排斥型不动点与吸收型不动点。又设ζ是任意一个不同于z_1与z_2的点。则f的乘子

$$\rho=[f(\zeta),\zeta,z_1,z_2]。$$

18. 设S是单位圆周，C是与S正交的另一圆周。又设z_0是单位圆内任意一点。过z_0求作一个圆周或直线与C正交，且与S正交。（提示：利用z_0关于C及S的对称点。）

这个题目的结论表明：在下一章中讨论非欧几何时下述命题成立：过一点恒可向一条非欧直线作一条垂线。

第二章　双曲非欧几何

双曲非欧几何又叫罗巴切夫斯基（Lobaceviskii，1792—1856)几何，有时简称为双曲几何或非欧几何。本章将通过一个模型来讲解这种几何，尤其是那些与欧氏几何不同的性质。

这里应该强调指出，罗巴切夫斯基几何的本来面目并非如此。它是纯公理体系及逻辑推理的结果。但这里却是从一个实际模型出发，一切叙述与证明都是围绕这一模型展开。所以在表述形式与证明方式上都与罗巴切夫斯基几何的原貌大相径庭。当然，在一切结论上两者是完全一致的。

§1　非欧几何的诞生

在非欧几何产生之前，从公元前300年至1800年的两千多年之间，传统的欧几里德几何一直统治着人们关于空间的观念。人们认为人类所赖以生存的这个空间就正如欧氏几何所描述的那样。似乎一切都是天经地义而无可怀疑的.欧几里德的书《几

何原本》在两千年间在世界上以各种版本不断印刷发行着，其发行量之大和版本之多，恐怕仅次于圣经。一直到今天，全世界的中学几何教本所讲的内容在本质上与《几何原本》没有差别。

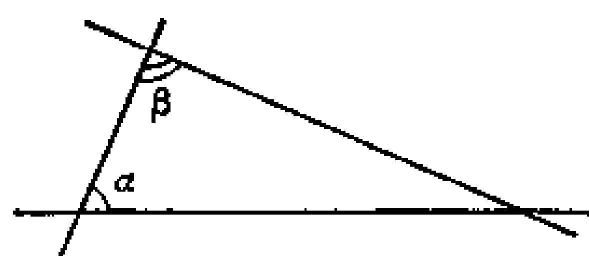
欧几里德的《几何原本》有如此巨大的影响是有深刻原因的。这首先是因为它以相当完善的公理体系及演绎的方法总结了前人的几何知识，不但大大超过了在他之前的所有几何著作，更重要的是它的高度完美使得在他之后的两千年间没有出现一本几何书可以与之媲美。其次，它的巨大影响的另一个原因还在于它的教育意义。几何学在当时（甚至在今天）在培养人的逻辑思维方面有着特殊的意义，是其它学科所不能替代的。

无论如何，欧几里德在公元前300年的这一巨著在建立演绎方法上和对后人的影响上，意义是非常巨大的。

欧几里德的《几何原本》问世之后，就伴随出现了"平行公设"问题，或者叫"第五公设"问题。

欧几里德在他的著作中，把一些对于一切科学都成立的若干事实列成公理，如全体大于部分之类。又把几何上的五条事实列成公设。其中第五条公设是：

"若一直线与两直线相交，且同侧所交的两内角之和小于两个直角，则两直线无限延长之后必相交于该侧之一点"。



$\alpha+\beta<\pi$

图2—1.1

几乎从一开始这个公设就遭到当时数学家们的非议。从形式上它与其它四条公设相比叙述上要复杂得多，而从内容上也不像其它四条公设那样一目了然，显然成立（其它几条公设是：两点可以决定一条直线；直线可以任意延长；有了中心及半径可以决定一个圆周；所有直角均相等）。

所以自《几何原本》问世之后，人们就打算去掉这一条公设。要么用其它四条公设及公理证明它，要么用更为明显的事实去替代它。按照后一办法去做的人就发现和提出了许多与第五公设等价的命题，如"过直线外一点只能作一条直线与给定直线平行"就是其中的一个。

试图用其它公设与公理去证明第五公设的人大有人在，并且许多人宣布自己证明了这一公设。但实际上，不久人们就发现，这里所谓"证明了"不过是在证明过程中暗中用了与第五公设等价的命题代替了它。应该指出，这些"证明"往往是十分精巧的，其错误的所在也是难于发现的。就像勒让德(Legendre, 1752-1833)这样的著名的数学家，也曾宣布证明了这一公设。最后是他自己指出了自己的错误。

证明第五公设这一难题吸引并折磨着世界上无数的数学家。无数次的失败使人心灰意懒。匈牙利的几何学家波里埃Bolyai,1802—1860）给他儿子的信中写道："你会在这上面花费掉所有时间，终生不能证明这命题……。这个昏无天日的黑暗将使成千个像牛顿那样杰出的天才全被吞没。它任何时候也不会在地面上明朗化，并且不让不幸的人类即使在几何学上取得成功。这是永远留藏在我内心里的巨创。"

但是失败也教育了人们。为了解决问题，人们开始从不同的角度去探索这一问题。一些数学家① 开始承认第五公设不能从其它公设中推出，并且开始怀疑欧几里德几何不是唯一的几何学。在这些数学家中就有著名的数学家高斯，不过他当时没有发表他的研究成果。

在前人的积累的基础之上，罗巴切夫斯基正式公开地提出

① 这里我们无法列出这些数学家的名字，有兴趣的读者请参考《古今数学思想》（第3册）。

他的新几何，向传统的欧氏几何的统治地位提出了挑战。从此，几何学的历史进入了新的一页，而延续了两千多年的平行公设问题，也随着人们逐渐接受罗巴切夫斯基几何而宣告结束。

罗巴切夫斯基承认欧几里德的其它四条公设，而把其中第五条改变为下列形式的公设：

"过直线外一点恒可作无数条直线与已知直线不相交。"

罗巴切夫斯基在更动了第五公设之后，推出了一系列的与欧氏几何不同的结论。尽管这些结论在直觉上不易接受，但在逻辑上却彼此无矛盾。这些结果构成了一个崭新的几何体系。现在我们将要简要地介绍一下这种几何。

罗巴切夫斯基考虑了过线外一点所引的一切直线。他把这一直线族中的直线分作两类：与已知直线相交者和与已知直线不相交者。在后面这类直线中一定有直线使得它与从已知点到已知直线的垂线的夹角最小。他把这个角称为**平行角**，见图2—1.2。欧几里德第五公设相当于假定平行角为直角，而罗巴切夫斯基公设则相当于假定平行角是锐角。

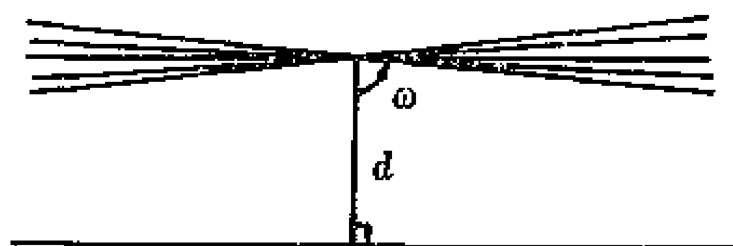


图2—1.2

罗巴切夫斯基把这种与垂线夹角最小的直线（根据对称性一定有两条）称作已知直线之**平行线**，而其它过已知点的不与已知直线相交的直线称作**超平行**。罗巴切夫斯基证明了平行角的大小只依赖于已知点到已知直线的距离d。令人惊讶的是他居然计算出了平行角ω对d的依赖关系式：

$$\omega = \arcsin(\mathrm{ch}d)^{-1}$$

其中ch表示双曲函数。

罗巴切夫斯基根据他的公设推出了三角形的内角之和小于π，并把π与三内角和的差称为角欠。他证明三角形的角欠的大小决定了它的面积（这一点高斯也得到了），并从此推出所有三角形的面积都不超过π！这真让人难于接受。

欧氏几何中两个三角形全同的三个条件$s. s. s.$；$s. a. s.$；$a. s. a.$，在证明中没有用到第五公设，因此这些命题在罗巴切夫斯基几何中依然成立。但在罗巴切夫斯基几何中又增加了一个充要条件，即$a. a. a.$，也就是说若两三角形的三个角对应相等则三角形全同。这就排除了相似而不全同的可能性。

毕达哥拉斯定理在欧氏几何中占有重要地位。但在罗氏几何中不再成立。罗巴切夫斯基导出了在非欧几何中直角三角形乃至一般三角形边与角的关系式。在形式上有点类似于正弦公式及余弦公式，但更复杂了。

圆周的长度不再与直径成正比，圆的面积的公式也不是通常的形式了。

§2 非欧几何的模型

罗巴切夫斯基几何在一开始自然不为人接受。就连罗巴切夫斯基本人在他发表他的著作时称之为“虚几何”（1837），似乎这种几何只是想象中的结果，而没有实际意义。

罗巴切夫斯基几何不为人接受的一个重要原因是它的许多结论与通常大家所熟知的事实相矛盾，尽管在逻辑推理上无隙可击。这样，须要在现实空间中找到一个实际模型来实现罗巴

切夫斯基几何。

第一个这样的模型是1868年意大利数学家贝尔特拉米(Beltrami, 1835—1899)给出的。他把罗巴切夫斯基平面的一片段与伪球面上的一个片段建立了点的对应，并把罗巴切夫斯基几何解释为伪球面上的内蕴几何。

贝尔特拉米的模型虽然是第一个非欧几何的模型，但它只是一个局部的而不是整体的模型。第一个整体的罗巴切夫斯基几何的模型是由克莱因给出（1870年）.他把单位圆作为罗巴切夫斯基平面，而把其中的弦作为罗巴切夫斯基几何中的直线，并适当定义了距离的概念，使得罗巴切夫斯基几何在这一模型得以实现。克莱因的这一模型使人们对于罗巴切夫斯基几何有了真实感。

在克莱因之后，法国数学家庞卡莱(Poincare′, 1854—1912）给出了另一个罗巴切夫斯基几何的模型。他把克莱因模型中的弦改换为垂直于单位圆周的圆弧，并把非欧几何与分式线性变换联系起来。庞卡莱的这一模型为罗巴切夫斯基几何的应用开辟了道路，特别是在解析函数论、黎曼曲面、自守函数等数学分支中产生了广泛的应用。尤其应该指出的是，直到现在许多现代数学的重要研究仍然要借助于这一模型。

庞卡莱模型是本书要讲的主要内容。现在我们来介绍这一模型。

在平面上取定一个单位圆U，也即以原点为心、以1为半径的圆：$\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$. 我们设想这个单位圆就代表整个无限的平面。U的边界，也即单位圆周，代表着这个无限平面的无限远.用文学语言形容，就是说那里是“天涯海角”.今后我们用S来表示单位圆周，也即$S=\{z\in\mathbf{C}: |z| =1\}$.

什么是平面直线的代表呢？在这一模型中，我们把U内与

S垂直的一切圆弧或直线弧作为直线的代表，并称之为非欧直线，见图2—2.1。这样，U的任意一条直径都是非欧直线。而其它的非欧直线都是弯的。

怎样计算任意两点间的距离呢？

设z_1与z_2是U内的任意两点，$z_1 \neq z_2$。过z_1与z_2作一个圆弧（或直线弧）垂直于S。设ζ_1与ζ_2是该弧在S上的两个端点，ζ_1靠近z_1而ζ_2靠近z_2。我们定义

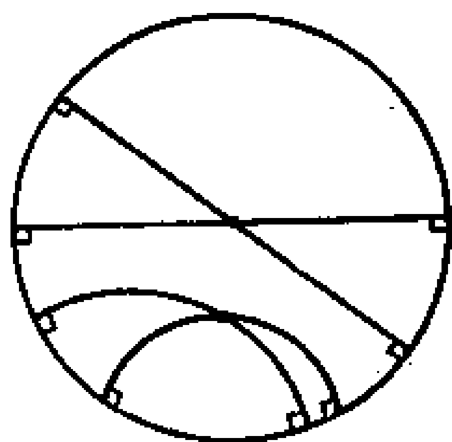


图2—2.1

$$d(z_1, z_2) = \log[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2]^{-1} \qquad (2.1)$$

是点z_1到z_2的非欧距离，同时也认为它是z_1与z_2所决定的非欧线段的非欧长度。当$z_1 = z_2$时，我们约定$d(z_1, z_2) = 0$。

注：过z_1与z_2能作且只能作一条非欧直线。这件事将在下面说明。

为了说明我们的定义是合理的，至少应当验证它满足通常距离的性质：

(i) $d(z_1, z_2) \geqslant 0$，等号仅在$z_1 = z_2$时成立； (2.2)

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$； (2.3)

(iii) $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$。 (2.4)

这里我们只验证(i)，而其它两条性质留给读者验证。

设$z_1 \neq z_2$，并令

$$\rho_j = |[z_1, z_2; \zeta_j]|, \quad \theta_j = \arg[z_1, z_2; \zeta_j], \quad j = 1, 2.$$

因为z_1，z_2，ζ_1，ζ_2在同一圆周或直线上，故$\theta_1 = \theta_2$。这样，交比

$$[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2]=\frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{2.5}$$

根据ζ_1与ζ_2的取法不难看出$\rho_1<1$而$\rho_2>1$，因而

$$0<[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2]<1.$$

由此推出$d(z_1, z_2)>0$。

从这一推导中，我们可以看出

$$d(z_1, z_2)=\log\frac{\rho_2}{\rho_1}=\log\frac{|z_2-\zeta_1||z_1-\zeta_2|}{|z_1-\zeta_1||z_2-\zeta_2|}. \tag{2.6}$$

当z_1（或z_2）沿着非欧直线趋向于ζ_1（或ζ_2）时$d(z_1, z_2)$趋于无穷。由此可见，一条非欧直线的非欧长度是无穷，尽管它用通常的距离概念测量时是有限长的。

练习1 设$z_1=0$，$z_2=r$（$0<r<1$）。证明

$$d(0, r)=\log\frac{1+r}{1-r}. \tag{2.7}$$

有了非欧距离的概念就能导出非欧圆与非欧圆周的概念。给定U内任意一点z_0及实数$r(r>0)$。到z_0的非欧距离小于r的一切点所组成的集合

$$D=\{z\in U: d(z, z_0)<r\}$$

称作一个**非欧圆**，而到z_0的非欧距离等于r的一切点所组成的集合

$$C=\{z\in U: d(z, z_0)=r\}$$

称作一个**非欧圆周**。这里z_0称作圆心，r称作半径。

以后会看到非欧圆周也是通常的圆周，只是其圆心不在通常圆心的位置上（除非圆心$z_0=0$），见图2—2.2。

练习2　求证以$z_0=0$为中心，以$r>0$为半径的非欧圆周是以0为中心且以$R=(e^r-1)/(e^r+1)$为半径的通常圆周。

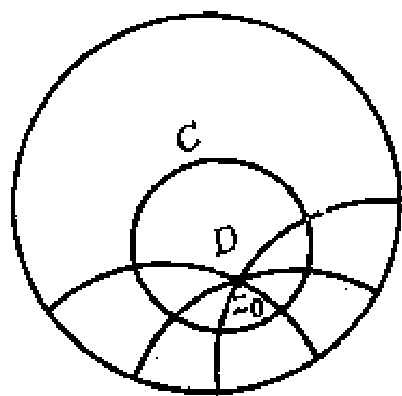


图2—2.2

最后我们来定义两条非欧直线段在相交处的夹角。因为非欧直线段是普通意义下的圆弧或直线弧，而这种弧的交角我们已在上一章中定义过了。现在我们就用通常意义下的圆弧的交角来作为非欧直线段的交角。

这样，我们就使得平面几何中所研究的基本概念在我们的模型中都有了相应的定义。

§3　庞卡莱模型与罗巴切夫斯基公理系统

现在我们必须验证上述的庞卡莱模型适合罗巴切夫斯基的公理系统。这里所谓罗巴切夫斯基的公理系统是指欧几里德的前四条公设再加上罗巴切夫斯基公设。

现在逐条说明如下：

(i) 过U内任意两点z_1与z_2能且只能连一条非欧线段。

当z_1与z_2中有一点是原点时，显然z_1与z_2的普通连线就是唯一的非欧连线。当z_1与z_2都不为原点时，我们考虑z_1关于S的对称点z_1^*。那么z_1，z_1^*与z_2所决定的圆周（或直线）必垂直于S，它在U中的部分即通过z_1与z_2的非欧直线。因此，z_1与z_2总有非欧直线段相连。这种非欧线段的唯一性是显然的。

(ii) 非欧直线段总可以无限延长。

前面我们已经说明，当一条非欧直线段的端点趋向于U的

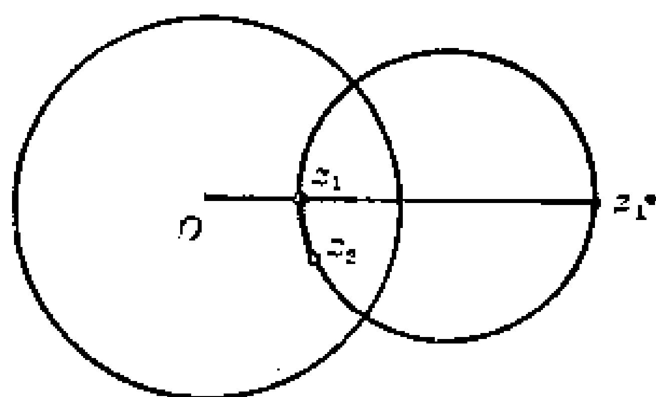


图2—3.1

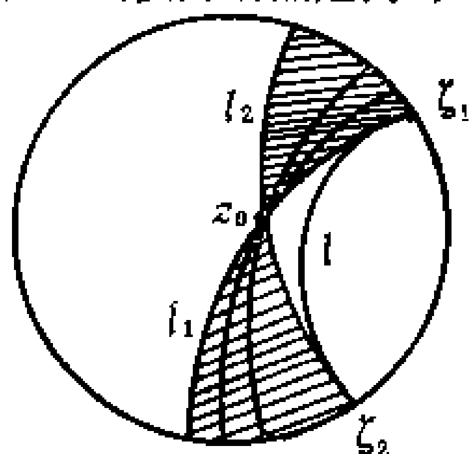


图2—3.2

边界时，线段的非欧长度要无限增大。可见非欧直线段可无限延长。

(iii) 所有直角均相等。

我们在庞卡莱模型中所定义的角度就是通常的角度。

(iv) 任意给定一点$z_0 \in U$及一个正数r总可作一个非欧圆周，以z_0为圆心且以r为半径。

这是显然的。

(v) 设l为U内任意一条非欧直线，z_0是U内一点，z_0不在l之上。则可以作无限条非欧直线，通过点z_0但不与l相交。

设ζ_1与ζ_2是非欧直线l在U的边界S上的两个端点。过z_0与ζ_1可以作一条非欧直线l_1，过z_0及ζ_2又可作另一条非欧直线l_2。显然这两条非欧直线在U内都与l不相交，并且l_1与l_2所夹的部分（图2—3.2中阴影部分）中的任意一点与z_0所决定的非欧直线均不与l相交。

l_1与l_2被称为过z_0点的与l平行的非欧直线，而其它过z_0点且与l不相交的非欧直线被称为超平行的非欧直线。

总之，我们的庞卡莱模型满足罗巴切夫斯基公设及欧几里

德几何中除平行公设之外的其它公设的要求。

接受庞卡莱模型的困难可能有两点：一是用一个有穷的圆来代表一个无限的平面，二是用弯的圆弧来代表直的直线段。这些让人感到不放心。

其实，让我们回忆一下平面几何中推理过程，几何的图形只是帮助我们思考的一种参考物，而不是证明的依据。直线画成弯的，圆心画成偏的，但只要我们的推理步骤都是依据了定义、公设（公理）及已经证明了的命题，则推出的命题依然是正确的。图形的直观感觉并不重要。我们用圆弧来代表直线段没有什么不可以的。至于为什么可以用一种有限的区域来代表无限的平面，这一问题将在下一节作进一步的解释。

§4 非欧运动与非欧度量

若f是U到U的一个变换，它保持U中任意两点的非欧距离不变，也即

$$d(z_1, z_2)=d(f(z_1), f(z_2)), \ \forall z_1, z_2\in U,$$

则称f是一个**非欧刚体运动**或简称为**非欧运动**。

现在我们要给出非欧运动的表达式。

命题4.1 设$z_0\in U$是单位圆内任意一点，$\theta\in \mathbb{R}$是任意一个实数。则分式线性变换

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \tag{4.1}$$

将U变成U，并在单位圆U上的作用是一个非欧运动。

证 令

$$g(z)=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}, \tag{4.2}$$

则g保持单位圆周不变（见第一章§8节(8.1)式），并且由于$g(z_0)=0$（把U内一点z_0变成U内一点0），故$g(U)=U$。另外，变换f是先作变换g再复合以旋转变换，而旋转变换也把U变成U，所以f将U变成U。

由变换f的保圆性及保角性可以推出，f将U内的非欧直线变为非欧直线。我们知道任意两点的非欧距离是由通过它们的非欧直线在U的边界上的端点及该两点的交比定义的。变换f又保持交比不变，故f保持非欧距离不变。证毕。

这一命题告诉我们，形如(4.1)式的分式线性变换都是非欧刚体运动。而且还告诉我们任意一点$z_0\in U$，总可以经过非欧运动移至U的中心。

推论 设l是U内的一条非欧直线。我们总可以通过一个适当的非欧运动将l上的指定点z_0变成0，而l变成实轴上的区间$(-1,1)$。

证 取$w=g(z)$是形如(4.2)的分式线性变换，这时$g(z_0)=0$且$g(l)$是一条过原点的非欧直线，也即$g(l)$是U的一条直径。再经过适当的旋转变换，$g(l)$就变成实轴上的区间。也就是说适当选取$\theta\in\mathbb{R}$，变换$f(z)=e^{i\theta}g(z)$就满足要求。证毕。

从命题4.1的证明中可以看出下列命题成立：

命题4.2 任何一个保持单位圆U不变的分式线性变换在U上都是非欧运动。

还有没有其它形式的非欧运动呢？有的。

设C是与单位圆周S正交的一个圆周。则关于C所作的反演变换一定保持单位圆U不变，并且将其中的非欧直线变成非欧

直线。请读者根据反演变换的性质证明这一结论。

设z_1与z_2是U内任意两点，$z_1 \neq z_2$。过z_1与z_2作一个圆周C'与S正交，交点为ζ_1与ζ_2，ζ_1靠近z_1而ζ_2靠近z_2。设f是关于C的反演变换，那么

$$[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2] = \overline{[f(z_1), f(z_2); f(\zeta_1), f(\zeta_2)]}.$$

但上述交比都是实数，故

$$[z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2] = [f(z_1), f(z_2); f(\zeta_1), f(\zeta_2)].$$

由此推出f保持非欧距离不变，也即

$$d(z_1, z_2) = d(f(z_1), f(z_2)).$$

因为圆周C在U内的部分是一条非欧直线，故关于C的反演变换也称为**关于该非欧直线的反演变换**。

总之，除了保持U不变的分式线性变换之外，关于非欧直线的反演变换也是非欧运动。可以证明：只有这两种非欧运动。

尽管非欧运动保持非欧距离不变，但它不保持欧氏距离不变。我们直观看到的图形的大小与形状是欧氏的。故在非欧运动下，图形的大小与形状**看上去**是要改变的。例如，通过原点的直线段经过非欧运动离开原点后就成了圆弧。图形在靠近U的边界时都要变小。我们提醒读者，所有这些结果都是“看上去”的，用非欧的“尺子”去测量时图形的大小并没有改变。这一点请读者一定理解。

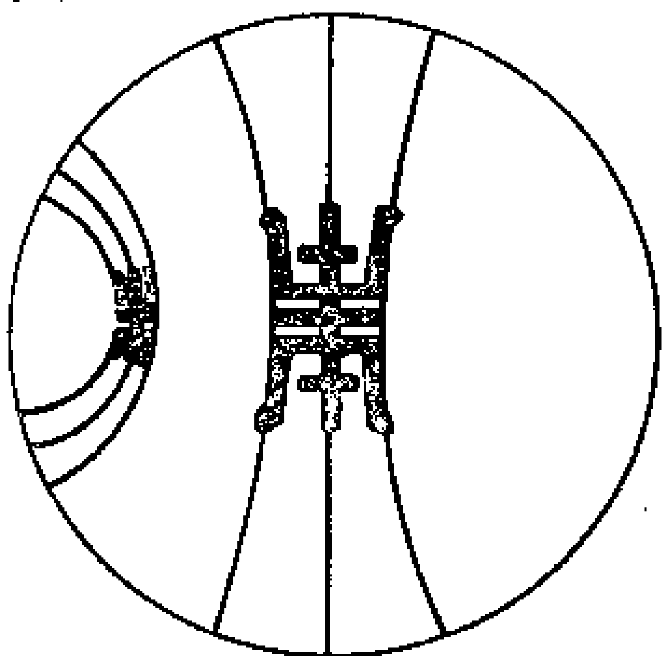


图2—4.1

图2—4.1表示了在非欧运动下肃字的变化。

图2—4.2中所有非欧三

角形都是全同的，不论是白三角形还是黑三角形，也不论是大的三角形还是小的三角形。在这些三角形中，每个黑的都是相邻的白三角形关于公共边反演的结果。

现在我们引入非欧度量的概念。这里所谓非欧度量实际上就是非欧距离与欧氏距离的一种换算比率。

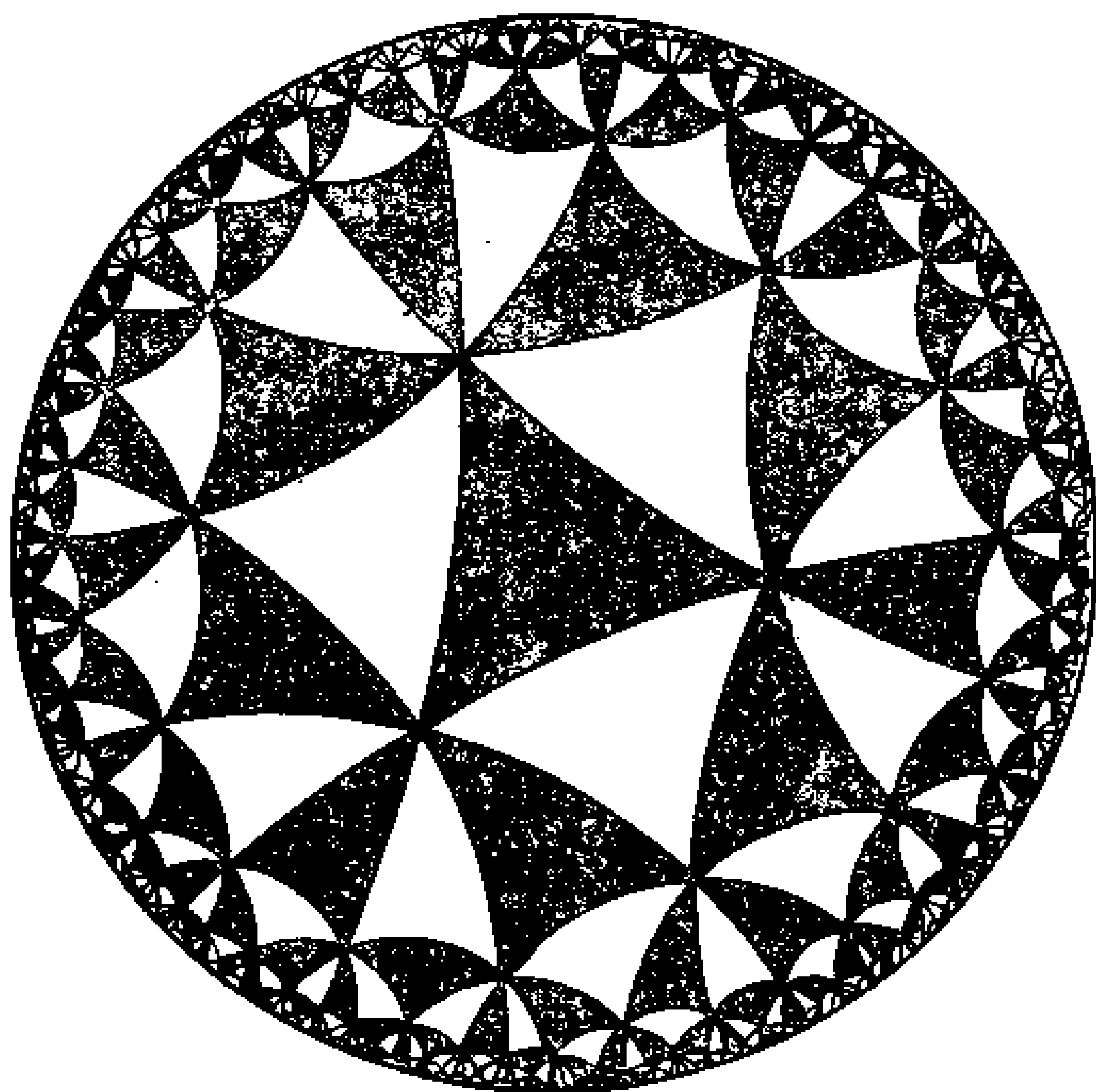


图2—4.2

设$z_0 \in U$是任意给定的一点，$z \neq z_0$是z_0附近的一点。我们要研究当$z \to z_0$时非欧距离$d(z_0, z)$与欧氏距离$|z_0 - z|$之比的极限：

$$\lim_{z \to z_0} d(z_0, z)/|z_0 - z|. \tag{4.3}$$

这个极限就是将来要定义的非欧度量的密度。

为了求得这个极限，我们先给出任意两点a，$b\in U$的非欧

也即

$$d(z_0,\ z)\approx\frac{2|z_0-z|}{1-|z_0|^2}。\tag{4.7}$$

令$\Delta z=z-z_0$，那么上式可以写成：

$$d(z_0,\ z_0+\Delta z)\approx\frac{2}{1-|z_0|^2}|\Delta z|\qquad(\Delta z充分小)。\tag{4.8}$$

这就是说，当z充分接近z_0时（也即Δz充分小时），z到z_0的非欧距离$d(z_0,z)$就差不多是其欧氏距离的$2/(1-|z_0|^2)$倍。或者说，在点z_0附近非欧距离与欧氏距离的比率是$2/(1-|z_0|^2)$。当z_0越靠近单位圆的边缘时，非欧距离与欧氏距离的这个比率就越大。而z_0越靠近原点时这个比率就越小．当$z_0=0$时，这个比率就是2。

我们把

$$\frac{2}{1-|z_0|^2}|\Delta z|$$

称为**非欧度量**，而$2/(1-|z_0|^2)$称为非欧度量的**密度**。

由于非欧度量的密度在点z_0趋向于U的边界时以很快的速度趋于无穷，故在欧氏平面上的有穷区域U用非欧尺度测量则是无限的。

有了上述的准备工作，我们就可以证明非欧几何的定理了．

§5 三角形的内角和小于平角及矩形之不存在

在欧氏几何中，三角形三个内角之和等于180°，这个定理的证明直接依赖于平行公设。（请读者回忆这个定理的证明步

骤.)因此，在更换平行公设之后，这一定理将首当其冲的受到影响。

在罗巴切夫斯基几何中，三角形的三个内角之和小于180°，而且可任意小。

为了统一起见，今后我们一律用弧度制来表示角度。比如直角记作$\pi/2$，平角或180°用π表示。

定理5.1 非欧三角形的三个内角之和小于π。

证 设w_1，w_2，w_3是单位圆U内的任意三点。它们之间的非欧连线决定的三角形记作$\Delta w_1w_2w_3$。根据上节的讨论，存在一个非欧运动，使w_1变为$z_1=0$，w_2变为z_2，w_3变为z_3。这时$\Delta w_1w_2w_3$与$\Delta z_1z_2z_3$的对应边及对应角均相等。因此只要证明$\Delta z_1z_2z_3$的三个内角之和小于π就足够了。

因为$z_1=0$，故$\Delta z_1z_2z_3$中以z_1为端点的边均落在单位圆的直径上，而在z_1处的内角恰好就是两直径之夹角。现将顶点z_1，z_2，z_3处的内角分别记作α，β，γ。

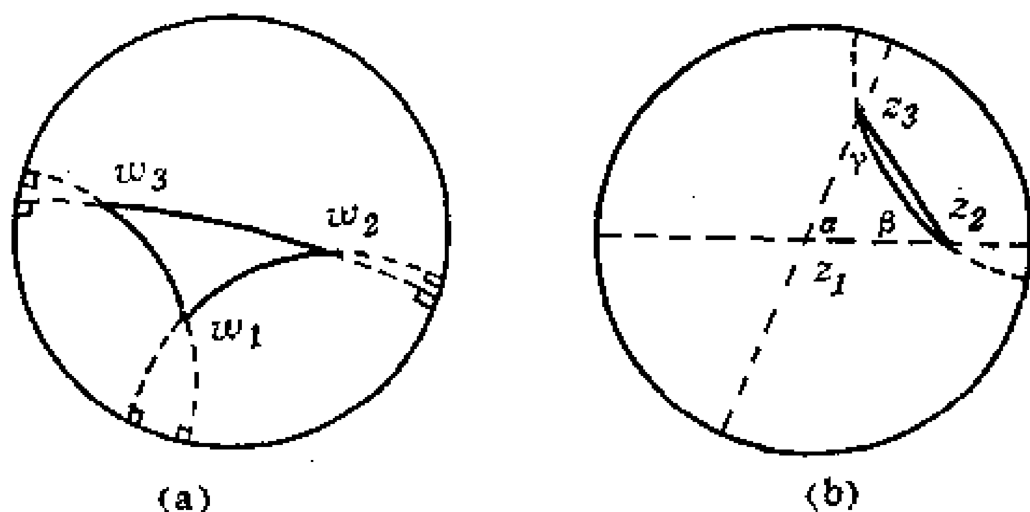


图2—5.1

用欧氏线段连结点z_2与z_3，那么该连线与非欧$\Delta z_1z_2z_3$的两条直边又构成了一个欧氏三角形。设该欧氏三角形在z_1，z_2，

z_3处的内角分别是α'，β'，γ'。那么由图2—5.1(b)不难看出$\alpha=\alpha'$，$\beta<\beta'$，$\gamma<\gamma'$。但$\alpha'+\beta'+\gamma'=\pi$，故

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi.$$

证毕。

读者对这个证明一定会提出这样的问题：证明是依据了直观图形，如果把z_2与z_3所决定的非欧直线画成向外凸那不糟糕了吗？

这是一个重要的质疑。

为了回答这一质疑，我们可以这样考虑：设z_2与z_3关于单位圆周S的对称点分别是z_2^*与z_3^*。那么z_2，z_3，z_2^*与z_3^*落在同一圆周C上，C与S正交，且C在U内的部分就是z_2与z_3决定的非欧直线。设C的圆心为ζ。只要说明ζ与z_1分别落在z_2与z_3所决定的欧氏直线l的两侧就足以回答我们的问题了.而这一点是显然的，因为z_2^*与z_3^*都落在l的另一侧（即与z_1不同侧）。

非欧三角形的内角和是否也是一个常数呢？回答是否定的。可以找到这样的非欧三角形，其内角和小于任意取定的正数。另一方面，又可以找到这样的非欧三角形，其内角之和与π之差小于任意给定的正数。

在单位圆周S上任意取定三点ζ_1，ζ_2，ζ_3。自原点出发向这三点分别连三条矢径，并在这三条矢径上分别取三点z_1，z_2，z_3。我们考虑非欧三角形$\Delta z_1z_2z_3$。点z_1，z_2，z_3处的内角分别记为α，β，γ。

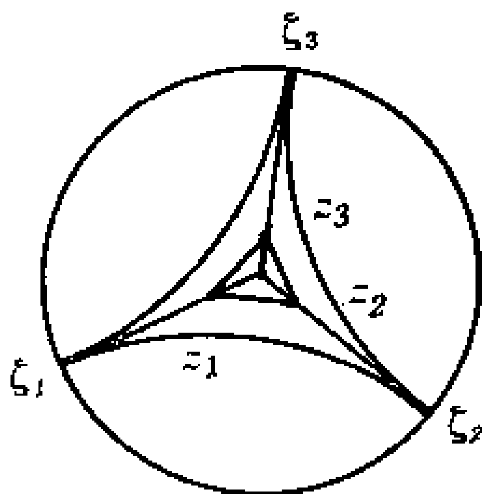


图2—5.2

当z_1，z_2，z_3沿着各自的矢径分别趋于ζ_1，ζ_2，ζ_3时，角

α，β，γ趋于零。当z_1，z_2，z_3沿矢径趋于原点时，非欧三角形的三条边越来越接近直线段，从而三个内角和$\alpha+\beta+\gamma$趋于π。

上述三个顶点均在单位圆周上的非欧三角形$\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$被称为**退化三角形**。它的三条边是两两平行的非欧直线。

在欧氏几何中也可能有三条直线两两平行。但不可能构成三角形，因为这时不可能其中任意两条总落在第三条直线的同侧。因此，欧氏几何中无退化三角形可言。

作为定理5.1的重要推论，我们将证明在非欧几何中不存在矩形，也即不存在四个内角都是直角的四边形。

定理5.2 不存在非欧线段组成的四边形，其每个内角均为直角。

证 用反证法。若存在这样的四边形，则此四边形可用一条对角线分作两个非欧三角形。由于四边形内角和为2π，故两个非欧三角形中至少有一个，其内角和$\geqslant\pi$。但这是不可能的。证毕。

在非欧几何中居然没有矩形！这似乎叫人感到失望。其实，矩形的存在这一命题等价于欧几里德第五公设。请有兴趣的读者参考《数学——它的内容、方法和意义》第三卷。

没有矩形也就没有正方形。跟此密切相关的毕达哥拉斯定理也就成了问题。

§6 平行角、平行与超平行

设$l\subset U$是一条非欧直线，w是U内任意一点且w不在l之上。我们要求出点w关于l的平行角ω。

过w作一条非欧直线h垂直于l（这总是可能的!），并设h交l于z_0。又设w至z_0的非欧距离为d，下面将看到ω只依赖于d。

由于非欧运动保持非欧距离和角度不变，并且把平行线变为平行线，故可以不失一般性假定$z_0=0$，$w=\rho i$，其中$\rho>0$是实数。因为w至z_0的非欧距离为d，故ρ与d满足下列关系式

$$\log\frac{1+\rho}{1-\rho}=d,$$

也即

$$\rho=\frac{e^d-1}{e^d+1}\equiv \mathrm{th}\left(\frac{d}{2}\right), \quad (6.1)$$

这里th表示**双曲正切函数**，其定义为

$$\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

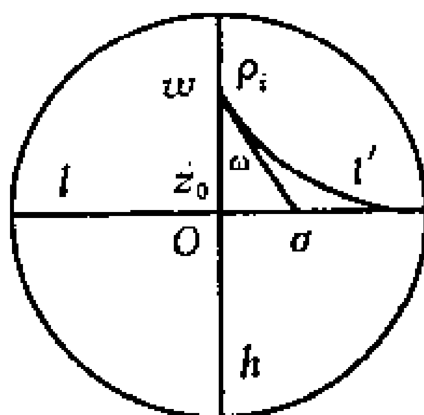


图2—6.1

由于假定$z_0=0$，$w=\rho i$，故l落在实轴上而h落在虚轴上（见图2—6.1）。过w作一条非欧直线l'与已知的l平行且l'在S上的一个端点为1。再过w作l'的切线交l（即实轴上的区间$(-1,1)$）于点σ（也用σ表示该点到原点的距离），则有

$$\sigma=\rho\,\mathrm{tg}\,\omega, \quad |\rho i-\sigma|=\rho/\cos\omega.$$

注意到l'切实轴于点1，又推出

$$|\rho i-\sigma|=1-\sigma.$$

因此，我们有

$$\rho\,\mathrm{tg}\,\omega+\rho/\cos\omega=\sigma+(1-\sigma)=1,$$

也即

$$\rho(1+\sin\omega)=\cos\omega.$$

对此式两端平方并化简即得到

$$(\rho^2+1)\sin^2\omega+2\rho^2\sin\omega+(\rho^2-1)=0$$

解此方程式并去掉负根即又得到

$$\sin\omega=(1-\rho^2)/(1+\rho^2)。\tag{6.2}$$

根据(6.1)式，将$\rho=\text{th}(d/2)$代入上式，则有

$$\sin\omega=\frac{2}{e^d+e^{-d}}=1/\text{ch}d,\tag{6.3}$$

其中ch表示双曲余弦函数，其定义是

$$\text{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

顺便指出，双曲正弦函数的定义是

$$\text{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

双曲正弦，双曲余弦及双曲正切统称为双曲函数，它们有类似于三角函数的关系式。

练习1 证明恒等式

$$\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1,\quad \text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}.$$

(6.3)式可以写成

$$\omega=\arcsin(\text{ch}d)^{-1}.\tag{6.4}$$

由此推出下列定理

定理6.1 平行角只依赖于点到给定非欧直线的垂直非欧距离d，并且是d的严格递减函数。当d从0递增至无穷时，平行角ω则从$\pi/2$递减至0并取遍其中一切值。

这个定理的证明要用到双曲余弦在$x\geqslant0$时的单调性。

练习2 证明ch$x$当$x\geqslant0$时是严格递增函数(提示：首先证

明$(y+1/y)/2$是y的严格递增函数，其中$y\geqslant 1$)。

推论 若两条非欧直线有公垂线，则它们是超平行的。

证 设l与l'有公垂线h，h交l与l'分别于z_0及w。设ω是w关于l的平行角，那么$\omega<\pi/2$。故l'与h的交角（实为$\pi/2$)介于ω及$\pi-\omega$之间，也即l'与l超平行。证毕。

在欧氏几何中两条平行线之间的距离是一个固定数。但是在非欧几何中这一条性质就不成立了。两条平行的非欧直线之间的距离沿平行方向①越来越小并趋于零。

要证明这一结论不能单靠直观。虽然，直观看两条平行的非欧直线沿平行方向越来越靠近，但这是从欧氏度量下看的，而从非欧度量来看是否也如此呢？这就不一定，因为非欧度量的密度越靠近单位圆边缘越大。

今后，我们说非欧直线l的线外一点z到l的距离是指点z到l的垂直非欧线段的非欧长度。

定理6.2 设l与l'是单位圆U内的两条平行的非欧直线。当动点$z\in l'$沿平行方向趋向U的边缘时，点z到l的距离趋于零。当$z\in l'$沿相反方向趋向于U的边缘时，点z到l的距离趋于无穷。

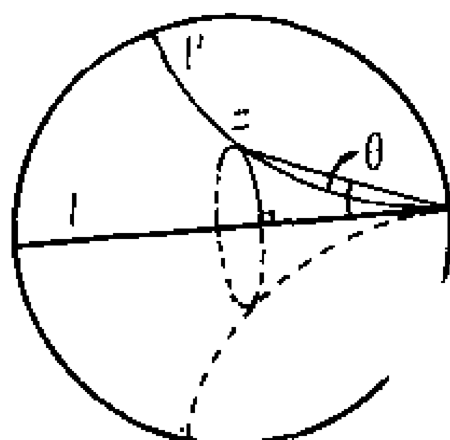


图2—6.2

证 不失一般性，假定l就是实轴上区间$(-1,\ 1)$，l'是上半圆内的一条非欧直线，与实轴相切于点$z=1$，见图2—6.2。

① 这里所说的平行方向是指这样的方向：两条平行的非欧直线沿此方向趋向于单位圆周上一个共同点。

在l'上任意取一点z，并记z到l的距离为$d(z, l)$。根据对称性，不难看出

$$d(z, l)=\frac{1}{2}d(z, \bar{z}).$$

这里$d(z, \bar{z})$表示点z到它的共轭点$\bar{z}$的非欧距离。根据公式(4.4)，我们有

$$d(z, l)=\frac{1}{2}d(z, \bar{z})=\frac{1}{2}\log\frac{|1-z^2|+|z-\bar{z}|}{|1-z^2|-|z-\bar{z}|}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{|z-\bar{z}|}{|1-z^2|}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{|z-\bar{z}|}{|1-z^2|}\right). \tag{6.5}$$

为了证明当$z\in l'$趋向1时$d(z, l)$趋向于零，只要证明

$$\frac{|z-\bar{z}|}{|1-z^2|}\to 0 \quad (z\to 1, \ z\in l'). \tag{6.6}$$

事实上，我们有

$$\frac{|z-\bar{z}|}{|1-z^2|}=\frac{2y}{|1-z||1+z|}=\frac{2\sin\theta}{|1+z|}. \tag{6.7}$$

其中θ是点z到1的连线与实轴之夹角(见图2—6.2)。因为l'与实轴相切，故$z\in l'$趋向1时，$\theta\to 0$。这样，由(6.7)就证明了(6.6)。即有$d(z, l)\to 0$ $(z\to 1, \ z\in l')$。

设ζ是l'在单位圆周上的另一个端点$(\zeta\neq 1)$。当$z\in l'$趋向ζ时，

$$|1-z^2|+|z-\bar{z}|\to|1-\zeta^2|+|\zeta-\bar{\zeta}|\neq 0$$

$$|1-z^2|-|z-\bar{z}|\to|1-\zeta^2|-|\zeta-\bar{\zeta}|=0$$

从而由(6.5)可知　$d(z,l)\to\infty$ $(z\to\zeta, \ z\in l')$。证毕。

练习2　证明当ζ是单位圆周上一点时，

$$|1-\zeta^2|-|\;-\bar{\zeta}|=0.$$

这个定理的一条直接推论就是在非欧几何中，任何两对平行直线都可以经过非欧运动使之重合，更确切地说即

推论 设l与l'平行，l_1与l_1'平行。则存在一个非欧运动f使得$l_1=f(l)$，$l_1'=f(l')$。

证 在l'上取定一点z_0，令$\eta=d(z_0,l)$。在l_1'上考虑动点z及点z到l_1的距离$d(z,l_1)$。由定理6.2可知，存在一点$z_1\in l_1'$使得$d(z_1,l_1)=\eta$.① 设z_0到l的非欧垂线的垂足为w_0，而z_1到l_1的垂足为w_1。取一分式线性变换g，使之保持U不变，且将w_0变为w_1并将l与l'的共同端点变为l_1与l_1'的共同端点。这时$g(l)=l_1$。若$g(l')$与l_1'落在l_1的同一侧，则很容易看出$g(z_0)=z_1$且$g(l')=l_1'$。故这时g就是所求的非欧运动。若$g(l')$与l_1'分居于l_1的两侧，则g再复合以关于l_1的反演变换就是所求的非欧运动。证毕。

推论告诉我们：在非欧几何中，任何平行的直线偶就其相对位置而言都是一样的，任何平行直线偶都不具有特殊性。

定理6.3 设l与l'是两条超平行的非欧直线，则当动点$z\in l'$沿任何方向趋向于单位圆U的边缘时，点z到l的距离$d(z,l)$趋向于无穷。

证明类似于定理6.2的证明后半部分，从略。

因为$d(z,l)$在l'的两端为无穷，故在l'上一定有最小值，而且一定在某点$z_0\in l'$处达到：

$$d(z_0,l)\leqslant d(z',l),\quad \forall z'\in l'. \tag{6.8}$$

---

①这里用到连续函数取中间值定理。

设z_0到l的垂线为h，h在l上的垂足为w_0。我们要证明h必为l与l'之公垂线。为此我们须要下列命题：

命题6.1 设l为任意一条非欧直线，z_0为l外的任意一点。则z_0到l的垂直距离$d(z_0,l)$是点z_0到l上任意一点z的非欧距离的最小者，也即

$$d(z_0,l)\leqslant d(z_0,z),\quad \forall z\in l. \tag{6.9}$$

证 不失一般性，假定l就是实轴上区间$(-1,1)$，而z_0是ρi，$\rho>0$。这时z_0到l的垂线h就落在虚轴上，且

$$d(z_0,l)=\log\frac{1+\rho}{1-\rho}. \tag{6.10}$$

对于任意一点$z\in(-1,1)$，我们由(4.5)式并注意$\bar{z}=z$即有

$$d(z_0,\ z)=\log\frac{1+|\rho i-z|/|1-z\rho i|}{1-|\rho i-z|/|1-z\rho i|} \tag{6.11}$$

由于

$$\frac{|\rho i-z|}{|1-z\rho i|}=\frac{\sqrt{\rho^2+z^2}}{\sqrt{1+z^2\rho^2}}\geqslant\rho\qquad\forall z\in \mathbf{R}$$

故由(6.10)及(6.11)推出$d(z_0,\ l)\leqslant d(z_0,\ z)$，对于一切$z\in l$。这里的等号当且仅当$z$是垂足时成立。证毕。

现在我们再回到原来的问题上。

由(6.8)式及命题6.1，我们有

$$d(z_0,\ l)\leqslant d(z',\ z),\quad \forall z'\in l',\ z\in l.$$

也即
$$d(z_0,\ w_0)\leqslant d(z',z),\quad \forall z'\in l',\ z\in l.$$

其中w_0是h的垂足。特别地，我们有

$$d(z_0,w_0)\leqslant d(z',w_0),\quad \forall z'\in l'.$$

这样，$d(w_0,\ l')\geqslant d(z_0,w_0)$。再利用命题6.1(其中的$z_0$换成$w_0$，$l$换成$l'$)立即推出$d(w_0,l')=d(w_0,z_0)$。但由命题6.1的

证明可以看出，这只有当z_0是自w_0向l'所作的垂线的垂足时才有可能成立。也就是说，h也是l'的垂线。

总之我们证明了，超平行的两条非欧直线有公垂线。再回顾定理6.1的推论即得到：

定理6.4 当且仅当两条非欧直线有公垂线时，它们是超平行的。

利用矩形之不存在，立即又推出两条非欧直线的公垂线至多有一条。

在欧氏几何中，两条直线为第三条直线所截，若同位角相等则两条直线平行。在非欧几何中，同位角相等意味着超平行。

定理6.5 设l_1与l_2是两条非欧直线，l是另外一条非欧直线。若l与l_1，l_2所交的同位角相等，则l_1与l_2是超平行的。

证 显然，l_1与l_2不能相交，因为否则就得到一个非欧三角形，其内角之和$>\pi$。因此，l_1与l_2要么平行，要么超平行。下面我们证明只有后面一种可能。

若所说的同位角都是直角，那么l是l_1与l_2的公垂线。这时l_1与l_2是超平行的。若同位角不是直角，这时过l_1与l_2所截l的线段的中点，向l_1作一垂线h，则h也一定是l_2的垂线（请读者自己论证）。故l_1与l_2是超平行的。证毕。

§7 非欧三角形的全同——相似意味着全同

在欧氏几何中，两个三角形的三条边对应相等，或两边及其夹角对应相等，或两角及其夹边对应相等，都是三角形全同的

充分条件。

这些命题在非欧几何中同样成立。利用非欧运动可以逐个证明这些命题，证明步骤与欧氏几何中的证明完全相同。因此，这些命题我们便不再证明了，并认为它们自然成立。顺便指出，在上节定理6.5的证明中请读者完成论证的部分，用全同三角形来证是十分方便的。

在非欧几何中，两个三角形的三个内角对应相等则全同。如果把三个内角对应相等的三角形称为**相似**三角形，那么在非欧几何中，相似蕴含着全同。

定理7.1 设在单位圆U内有两个非欧三角形$\triangle z_1z_2z_3$和$\triangle w_1w_2w_3$。若顶点z_j处的内角等于w_j处的内角，$j=1,2,3$，则$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$全同，也即存在一个非欧运动f，使得$w_j=f(z_j)$，$j=1,2,3$。

证 因为经过非欧运动总可以把z_1移到原点，z_2移到正实轴，z_3移到上半圆内，故可不失一般性假定z_1，z_2，z_3本来就是如此，也即$z_1=0$，$z_2\in(0,1)$，$\mathrm{Im}z_3>0$。同样，可以假定$w_1=0$，$w_2\in(0,1)$，$\mathrm{Im}w_3>0$。

用反证法 假定$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$不全同。这时必定有$w_2\neq z_2$(若$w_2=z_2$，则由角、边、角对应相等推出两三角形全同)。又因为z_1处的内角等于w_1处的内角，故z_3与w_3落在同一矢径上。z_2、z_3所决定的非欧直线与w_2、w_3所决定的非欧直线是超平行的(与实轴形成的同位角相等)，所以非欧线段$\overline{z_2z_3}$与$\overline{w_2w_3}$不会相交。这样$z_2w_2w_3z_3$构成了一个非欧四边形。现将其内角记作$\alpha,\beta,\gamma,\delta$，依次对应于顶点$z_2$，$w_2$，$w_3$，$z_3$。这时根据三角形内角对应相等的假设有$\alpha+\beta=\pi$，$\gamma+\delta=\pi$。这样$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$。注意到四边形$z_2w_2w_3z_3$可分解为两个三角

形，由三角形内角和$<\pi$又推出$\alpha+\beta+\gamma+\delta<2\pi$，矛盾。此矛盾表明$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$全同。证毕。

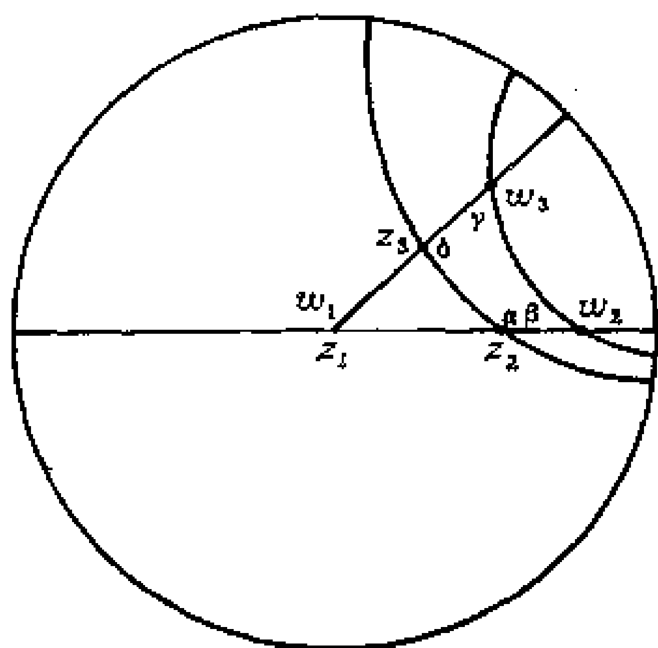


图2—7.1

图2—7.1是定理7.1证明中用的。利用它还可以证明更为一般的结果：

定理7.2 若$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$中有两个内角对应相等但不全同，则第三个内角一定不相等，第三个内角较小者对边较长。

留给读者自己证明。

§8 海雅姆-萨开里四边形

所谓海雅姆-萨开里四边形是这样的非欧四边形：它有两个对边（被称为腰）同垂直于一边（被称为下底），且两腰长度相等。下底的对边被称为上底，上底的两个内角被称为底角。

海雅姆-萨开里四边形在罗巴切夫斯基几何中起着重要作用。在我们现在的这个讲法里虽然没有那么重要，但有些地方

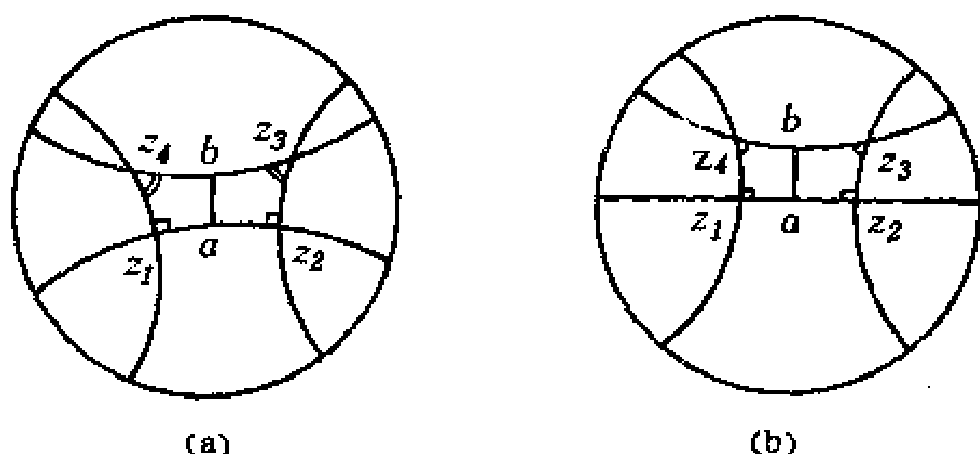


图2—8.1

还是要用它。本节的主要目的是利用海雅姆-萨开里四边形证明非欧三角形两腰中点连线小于底边之半。

很容易由对称性看出，海雅姆-萨开里四边形上底与下底的中点连线是两底的公垂线，并且两个底角相等。

显然，底角是锐角。

命题8.1 海雅姆-萨开里四边形的上底的非欧长度大于下底的非欧长度。

证 任意一个海雅姆-萨开里四边形（见图2—8.1(a)）总可以经过一个非欧运动将其下底移到实轴上，而下底的中点变成原点，且上底中点落在虚轴上(见图2—8.1(b))。因此，不失一般性，我们假定海雅姆-萨开里四边形 $z_1z_2z_3z_4$ 满足这些要求。又设b是上底z_3z_4之中点，$b=\rho i$，$\rho>0$。这时下底的非欧长度为

$$2d(z_2,0)=2\log\frac{1+z_2}{1-z_2},\quad (z_2>0),$$

而上底的非欧长度为

$$2d(z_3,\rho i)=2\log\frac{1+\dfrac{|z_3-\rho i|}{|1+\rho iz_3|}}{1-\dfrac{|z_3-\rho i|}{|1+\rho iz_3|}}.$$

设$z_3=x_3+iy_3\quad(x_3,y_3\in\mathbf{R})$，那么显然$y_3>\rho$，$x_3>z_2$。于是

$$\frac{|z_3-\rho i|}{|1+\rho iz_3|}=\frac{\sqrt{(y_3-\rho)^2+x_3^2}}{\sqrt{(1-\rho y_3)^2+\rho^2x_3^2}}$$

$$\geqslant\frac{x_3}{\sqrt{1-2\rho y_3+\rho^2(x_3^2+y_3^2)}}$$

$$\geqslant\frac{x_3}{\sqrt{1-2\rho^2+\rho^2}}$$

$$\geqslant x_3>z_2$$

于是有　$2d(z_2,\ 0)<2d(z_3,\ \rho i)$。

证毕。

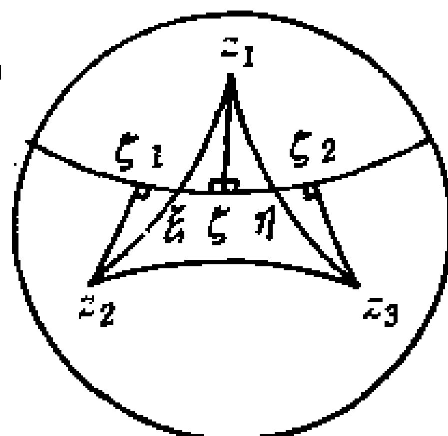


图2—8.2

定理8.1　非欧三角形两腰中点连线小于底边之半。

证　设$\triangle z_1z_2z_3$是单位圆U内的一个非欧三角形。又设ξ与η分别是两腰$\overline{z_1z_2}$与$\overline{z_1z_3}$的中点(非欧距离意义下的中点)。用非欧直线l连结ξ与η并由z_1向l作垂线h，设垂足为ζ。则此有三种可能：(i)ζ落在非欧三角形的内部；(ii)ζ恰好与ξ或η重合；(iii)ζ落在非欧三角形之外。

先讨论第(i)种情况。在这种情况下，我们在l上取两点ζ_1与ζ_2，使之均落在非欧三角形之外，且有

$$d(\zeta,\xi)=d(\zeta_1,\xi),\quad d(\zeta,\eta)=d(\zeta_2,\eta).$$

用非欧线段连结ζ_1z_2与ζ_2z_3。则不难看出非欧三角形$\triangle z_1\zeta\eta$与$\triangle z_3\zeta_2\eta$全同，$\triangle z_1\zeta\xi$与$\triangle z_2\zeta_1\xi$全同。于是非欧线段$\overline{\zeta_1z_2}$与$\overline{\zeta_2z_3}$垂直于l且它们的非欧长度相等。由此推出$\zeta_1\zeta_2z_3z_2$是一个海雅姆-萨开里四边形。由命题8.1可知

$$d(z_2, z_3) > d(\zeta_1, \zeta_2) = 2d(\xi, \eta).$$

即在这种情况下证明了定理的结论。

现在讨论第(ii)种情况。不妨设$\zeta=\xi$。这时取$\zeta_2 \in l$使得ζ_2落在三角形之外，且使得$d(\xi,\eta)=d(\eta,\zeta_2)$。连结$\zeta_2$与$z_3$便得到海雅姆-萨开里四边形$\xi\zeta_2 z_3 z_2$，并同样得到定理的结论。

第(iii)种情况的讨论完全类似，从略。证毕。

由此定理立即推出：非欧三角形的一边的中线小于另外两边之和之半。

在非欧几何中，三角形的两腰中点连线小于底边之半，这件事跟非欧度量的曲率是负的这一特征有关。

此处我们不打算深入探讨这一问题，只想举例说明。

在欧氏平面上，三角形的两腰中点连线恰好等于底边之半。平面是平坦的，我们认为平面的曲率为零，或者说欧氏度量的曲率为零。

在半径为R的球面上也可以建立几何学。球面上任意两点之间的连线就是过该两点的大圆的圆弧。球面上的三角形的两腰中点连线大于底边之半。这是球面弯曲的结果。半径为R的球面的曲率规定为$1/R^2$。曲率者曲面的弯曲程度也。

所谓负曲率曲面是指这样的曲面：曲面上每一点都有两个相正交的通过法线的平面，它们与曲面的交线是两条向相反方

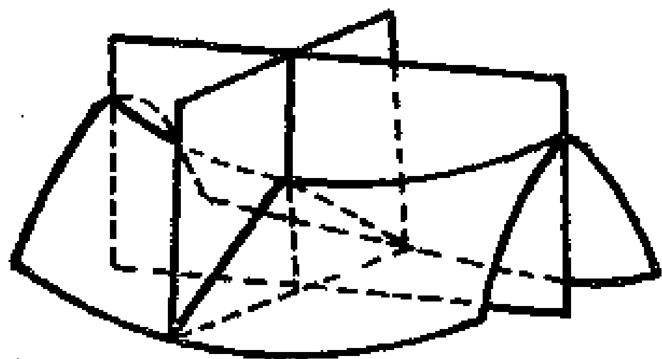


图2—8.3

向弯曲的曲线。因为弯曲方向相反，故称为负曲率曲面。一个最典型的例子是马鞍形曲面(见图2—8.3)。

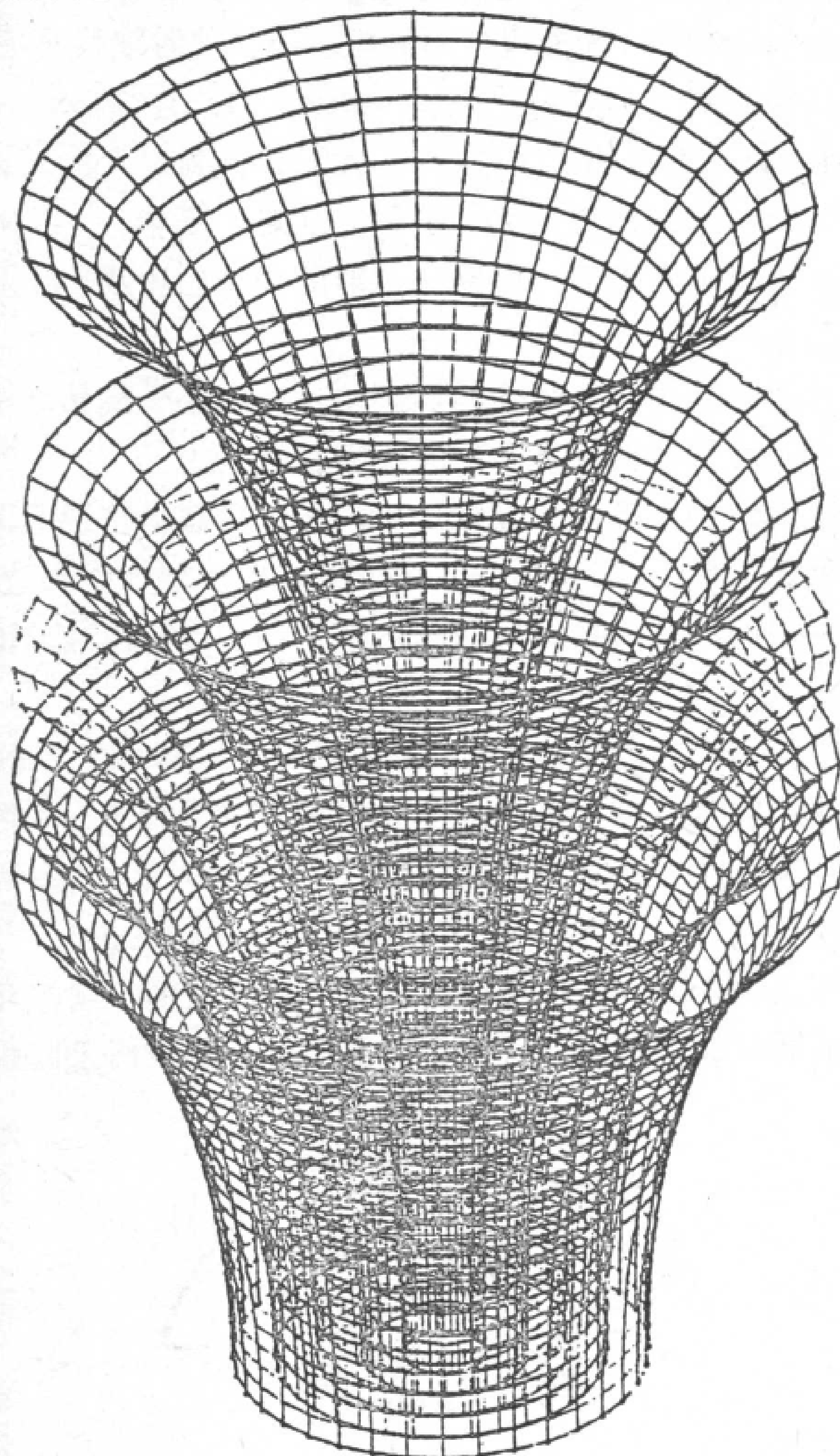


图2—8.4

图2—8.4中画出的几个废纸篓形状的曲面也是负曲率曲面。你能在这些曲面上的每一点处找出两个截面使其截得的曲线弯曲方向相反吗？

图2—8.4中的曲面在数学上有个名字叫伪球面。它的曲率是一个负的常数。我们曾经指出过，罗巴切夫斯基几何可以在伪球面上实现。现在我们不妨用它验证一下关于三角形两腰中点连线的定理。我们说伪球面上任意两点间连线是指两点间长度最短的连线。设想在伪球面上任给三点，并用这种连线构成一个三角形。再将两腰的中点用最短线相连。从直观上你就会发现中点连线小于底边的一半。这是由曲面的特殊弯曲形态所决定的。

读到这里读者会发问：罗巴切夫斯基几何的庞卡莱模型——单位圆不是平的吗？它的曲率可不是负的！这作何解释呢？

庞卡莱的模型的重要组成部分是它的非欧度量。这种特殊的计算长度的办法完全不代表单位圆的任何几何性质，而它实质上代表着一个曲率为－1的曲面的几何性质。(现代的微分几何理论可以给出确切的解释)。在这种看法下，我们把庞卡莱模型中的非欧度量称作是负曲率的。

§9　正弦定律与余弦定律

在欧氏几何中，反映三角形的边长与所对内角的关系式，即正弦定律与余弦定律，在解决有关三角形问题时起着重要作用。

在非欧几何中，也有类似的公式，但形状变了样。现将它们列出如下：

正弦定律： $\frac{\mathrm{sh}a}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{sh}b}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{sh}c}{\sin\gamma}$。 (9.1)

余弦定律I： $\mathrm{ch}c=\mathrm{ch}a\mathrm{ch}b-\mathrm{sh}a\mathrm{sh}b\cos\gamma$。 (9.2)

余弦定律II： $\mathrm{ch}c=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$。 (9.3)

这里a，b，c是三角形的三个边的边长，α，β，γ分别是a，b，c边的对角。

这里的正弦定律与余弦定律I至少在形状上与欧氏几何中的公式有点类似，但余弦定律II则在欧氏几何中没有对应物。

由余弦定律II立即看出，三角形的三个内角决定了其三条边的长度。于是我们再次看到：两个三角形的内角对应相等，则两个三角形全同。

当三角形有一个内角为直角时，比如$\gamma=\pi/2$，则由余弦定律I有

$$\mathrm{ch}c=\mathrm{ch}a\mathrm{ch}b。 \tag{9.4}$$

这恰好是欧氏几何中的毕达哥拉斯定理在非欧几何中的对应物，但形式上有了很大差别。

现在，我们来证明这些定律。

不失一般性，假定非欧三角形$\triangle z_1z_2z_3$的三个顶点z_1，z_2，z_3放在下述特殊位置上：$z_1=0$，$z_2=r>0$，$\mathrm{Im}z_3>0$，并且设$\sigma=|z_3|$。又设在顶点z_3，z_2，z_1处的内角分别为α，β，γ，它们对边的非欧长度分别为a，b，c。见图2—9.1。

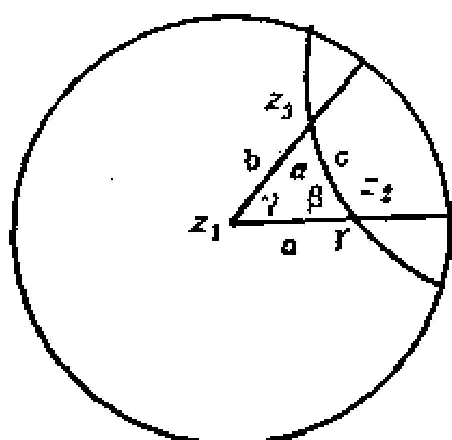


图2—9.1

这样由公式(4.4)有

$$a=\log\frac{1+r}{1-r}, \tag{9.5}$$

$$b=\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma},\quad \sigma=|z_3|,\tag{9.6}$$

$$c=\log\frac{|1-rz_3|+|z_3-r|}{|1-rz_3|-|z_3-r|}.\tag{9.7}$$

由(9.5)及(9.6)，我们又有

$$r=\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right),\qquad \sigma=\operatorname{th}\left(\frac{b}{2}\right)\tag{9.8}$$

令

$$\delta=\frac{|z_3-r|}{|1-rz_3|}.$$

通过计算不难验证

$$\frac{\delta^2}{1-\delta^2}=\frac{|z_3-r|^2}{(1-r^2)(1-\sigma^2)},\quad \sigma=|z_3|.\tag{9.9}$$

由欧氏几何中的余弦定律又得

$$\frac{\delta^2}{1-\delta^2}=\frac{r^2+\sigma^2-2\sigma r\cos\gamma}{(1-r^2)(1-\sigma^2)}.\tag{9.10}$$

另外一方面，我们由(9.7)有

$$\delta=\operatorname{th}\left(\frac{c}{2}\right).$$

故

$$\frac{\delta^2}{1-\delta^2}=\operatorname{th}^2\left(\frac{c}{2}\right)\Big/\left[1-\operatorname{th}^2\left(\frac{c}{2}\right)\right]$$

$$=\operatorname{sh}^2\left(\frac{c}{2}\right).\tag{9.11}$$

练习1 证明双曲正弦的半角公式

$$\operatorname{ch}c=2\operatorname{sh}^2\left(\frac{c}{2}\right)+1\tag{9.12}$$

由(9.10)至(9.12)有

$$\text{ch}c = 2\frac{r^2+\sigma^2-2\sigma r\cos\gamma}{(1-r^2)(1-\sigma^2)}+1$$

$$= \frac{(1+r^2)(1+\sigma^2)-4\sigma r\cos\gamma}{(1-r^2)(1-\sigma^2)} \tag{9.13}$$

练习2 证明双曲函数的倍角公式

$$\text{sh}2x = 2\text{sh}x\text{ch}x, \tag{9.14}$$

$$\text{ch}2x = \frac{1+\text{th}^2x}{1-\text{th}^2x} = \text{sh}^2x+\text{ch}^2x. \tag{9.15}$$

由(9.8)及上述倍角公式得到

$$\frac{1+r^2}{1-r^2} = \text{ch}a, \qquad \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} = \text{ch}b,$$

$$\frac{2r}{1-r^2} = \text{sh}a, \qquad \frac{2\sigma}{1-\sigma^2} = \text{sh}b,$$

代入(9.13)即证得了余弦定律I。

现在证明正弦定律。由余弦定律I有

$$\frac{\sin^2\gamma}{\text{sh}^2c} = \left(1-\frac{(\text{ch}a\text{ch}b-\text{ch}c)^2}{\text{sh}^2a\text{sh}^2b}\right)\Big/\text{sh}^2c$$

$$= \frac{\text{sh}^2a\text{sh}^2b-\text{ch}^2c\text{ch}^2b-\text{ch}^2c+2\text{ch}a\text{ch}b\text{ch}c}{\text{sh}^2a\text{sh}^2b\text{sh}^2c}$$

$$= \frac{1-\text{ch}^2a-\text{ch}^2b-\text{ch}^2c+2\text{ch}a\text{ch}b\text{ch}c}{\text{sh}^2a\text{sh}^2b\text{sh}^2c}.$$

令上式右端为E，则E关于a，b，c是对称的。因此，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\text{sh}^2a} = E, \qquad \frac{\sin^2\beta}{\text{sh}^2b} = E.$$

这样便证明了正弦定律。

最后证明余弦定律II。令F是E的分子。那么

$$\sin\gamma=\sqrt{F}/\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b.$$

同样有

$$\sin\beta=\sqrt{F}/\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}c.$$

$$\sin\alpha=\sqrt{F}/\mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}c.$$

这样，我们有

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{1}{F}(\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}^2c)\cdot$$

$$\cdot(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma).$$

另外，由余弦定律I又有

$$\cos\gamma=\frac{\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b-\mathrm{ch}c}{\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b},$$

$$\cos\beta=\frac{\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}b}{\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}c},$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{ch}b\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}c}.$$

故得

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{1}{F}(\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}^2c)$$

$$\times\left[\frac{(\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}b)(\mathrm{ch}b\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}a)}{\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b\,\mathrm{sh}^2c}+\frac{\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b-\mathrm{ch}c}{\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b}\right]$$

$$=\frac{1}{F}[(\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}b)(\mathrm{ch}b\,\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}a)$$

$$+\mathrm{sh}^2c(\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b-\mathrm{ch}c)]$$

注意到$\mathrm{sh}^2c=\mathrm{ch}^2c-1$，上式右端经过化简后即得$\mathrm{ch}c$。这样就证明了余弦定律II。

§10 直角三角形——毕达格拉斯定理的新形式

在上节中我们已经知道，角度为α，β，$\pi/2$的三角形中成立下列公式(它是非欧几何中的毕达格拉斯定理)：

$$\text{ch}c=\text{ch}a\,\text{ch}b$$

其中a，b，c分别为α，β，$\pi/2$对边的非欧长度。现在我们进一步给出在直角三角形中边与角的关系式：

$$\text{sh}a=\text{sh}c\sin\alpha, \qquad (10.1)$$

$$\text{th}b=\text{th}c\cos\alpha, \qquad (10.2)$$

$$\text{th}a=\text{sh}b\,\text{tg}\,\alpha. \qquad (10.3)$$

在欧氏直角三角形中，一个锐角的三角函数总代表着两条边的比。从上边的公式中可以看出，这种关系在非欧直角三角形中变得复杂化了，但仍然有某种可类比之处。

公式(10.1)是正弦定律的直接推论。

为了推导公式(10.2)，我们利用余弦定律。由余弦定律I，我们有

$$\text{th}c\cos\alpha=\frac{\text{ch}b\,\text{ch}c-\text{ch}a}{\text{sh}b\,\text{ch}c}$$

$$=\frac{\text{ch}a\,\text{ch}^2b-\text{ch}a}{\text{sh}b\,\text{ch}a\,\text{ch}b}$$

$$=\frac{\text{ch}^2b-1}{\text{sh}b\,\text{ch}b}$$

$$=\text{th}b,$$

这里用到了$\text{ch}c=\text{ch}a\,\text{ch}b$及$\text{ch}^2b-1=\text{sh}^2b$。这就证明了(10.2)。

由已证明的(10.1)及(10.2)立即推出

$$\mathrm{ch}c\,\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{th}b}, \tag{10.4}$$

也即

$$\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b\,\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ch}b\,\mathrm{sh}a/\mathrm{sh}b,$$

$$\mathrm{sh}b\,\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{th}a.$$

这就证明了(10.3)。

当乍一看到公式(10.1)至(10.3)时，我们会感到似乎其中无规律可寻。其实不然，在平行角这一概念的帮助下这些公式可以用适当的规则记忆。

我们知道，在线外一点处的平行角ω只依赖于该点到已知直线的垂直距离d。其函数关系记为$\omega=L(d)$，并有

$$\sin\omega=(\mathrm{ch}d)^{-1}, \tag{10.5}$$

也即

$$\sin L(d)\equiv(\mathrm{ch}d)^{-1}. \tag{10.6}$$

由(10.5)又不难推出

$$\cos\omega=\mathrm{th}d,\qquad \mathrm{tg}\omega=(\mathrm{sh}d)^{-1},$$

也即

$$\cos L(d)\equiv\mathrm{th}d,\qquad \mathrm{tg}L(d)\equiv(\mathrm{sh}d)^{-1}. \tag{10.7}$$

这样，我们通过平行角将双曲函数用三角函数表示出来。在这种表示下，公式(10.1)至(10.3)可以写成

$$\mathrm{tg}L(c)=\mathrm{tg}L(a)\sin\alpha, \tag{10.8}$$

$$\cos L(b)=\cos L(c)\cos\alpha, \tag{10.9}$$

$$\mathrm{tg}L(b)\cdot\cos L(a)=\mathrm{tg}\alpha, \tag{10.10}$$

而直角三角形的三边关系则可写成

$$\sin L(c)=\sin L(a)\sin L(b). \tag{10.11}$$

关于角β也有类似于(10.8)至(10.10)的关系式。

由这些关系式又可以诱导出许多其它关系式，如

$$\sin L(c)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \tag{10.12}$$

$$\sin\alpha=\sin L(b)\cos\beta;\quad \sin\beta=\sin L(a)\cos\alpha, \tag{10.13}$$

$$\cos L(a)=\operatorname{ctg}L(b)\operatorname{tg}\alpha;\quad \cos L(b)=\operatorname{ctg}L(a)\operatorname{tg}\beta, \tag{10.14}$$

$$\sin\alpha=\operatorname{ctg}L(a)\operatorname{tg}L(c);\quad \sin\beta=\operatorname{ctg}L(b)\operatorname{tg}L(c). \tag{10.15}$$

所有这些公式可以由下列法则概括：在图2—10.1中，任意一个扇形中的量，其正弦的值都等于它对面的两个扇形里的量的余弦之乘积，又等于它相邻的两个扇形里的量的正切之乘积。

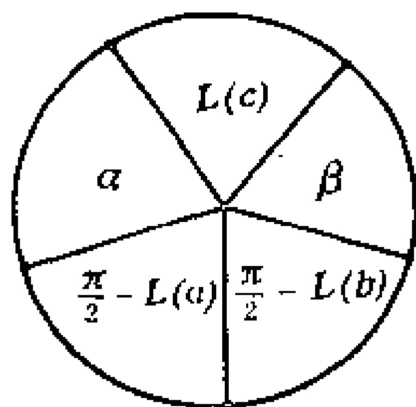


图2—10.1

值得提到的是在罗巴切夫斯基的原始论文中并没有出现双曲函数，而是采用了三角函数及三角形各边的$L(a)$，$L(b)$及$L(c)$。

§11 内切于三角形的圆不能任意大

像在欧氏几何中一样，在非欧几何中三角形的三个内角的分角线交于一点，并且这一点就是三角形的内切圆的圆心。与欧氏几何所不同的是，非欧三角形的内切圆的大小只依赖于三个内角，或者更确切地说只依赖于内角的余弦。

设$\triangle z_1z_2z_3$是单位圆U内任意给定的一个非欧三角形，顶点z_1，z_2，z_3处的内角分别记作α，β，γ。不失一般性可设γ是三个内角中最小者。这样，$\gamma<\pi/2$。

过顶点z_1与z_2分别作α与β之分角线。设它们相交于点w。则w只可能落在三角形的内部（为什么？请解释）。用非欧直线段连结z_3与w，并自w分别向三边作垂线。由于γ，$\alpha/2$及$\beta/2$均小于$\pi/2$，故向三边所作垂线的垂足都落在三条边上，而不落在顶点或边的延长线上，见图2—11.1。

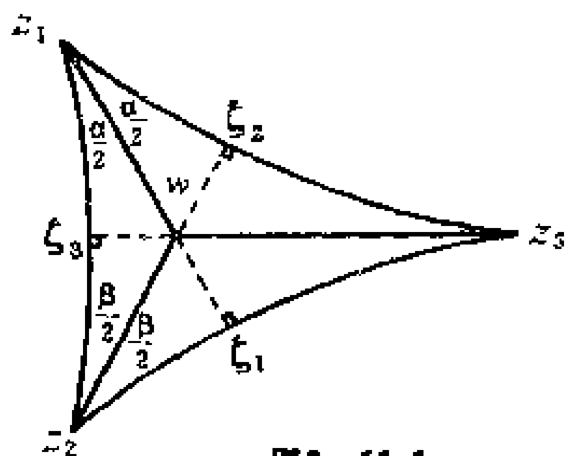


图2—11.1

记三个垂足分别为ζ_1，ζ_2，ζ_3，其位置如图2—11.1所示。利用上节中的公式，并注意到$\overline{z_2w}$及$\overline{z_1w}$是分角线，很容易推出，$d(w,\ \zeta_1)=d(w,\ \zeta_3)$，$d(w,\ \zeta_3)=d(w,\ \zeta_2)$，其中$d$表示两点的非欧距离。这样，$d(w,\ \zeta_1)=d(w,\ \zeta_2)$，并且再次应用上节中的公式即推出$\angle\zeta_2z_3w=\angle\zeta_1z_3w$，也即$\overline{z_3w}$是$\gamma$的分角线。

这样，我们证明了

定理11.1 任意非欧三角形的三条内角平分线交于一点。

现在我们说明角平分线的交点就是三角形内切圆之圆心。我们仍利用图2—11.1。设$r=d(w,\ \zeta_1)$，以w为中心且以γ为半径作非欧圆周C：

$$C=\{z\in U:\ d(w,z)=r\},$$

由命题6.1可知，点w到三条边上任意一点的非欧距离均不小于点w到三边的垂线的非欧长度，故C内切于三角形之内。

现在我们计算C的半径r。

记$d(z_1,\ \zeta_3)=\sigma$，$d(z_2,\ \zeta_3)=\rho$。由公式(10.3)有

$$\text{th}r=\text{sh}\sigma\,\text{tg}\,\alpha/2.$$

故有

$$(1+\cos\alpha)\text{th}r=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\text{tg}\frac{\alpha}{2}\text{sh}\sigma=\sin\alpha\text{sh}\sigma. \tag{11.1}$$

同理有

$$(1+\cos\beta)\text{th}r=\sin\beta\text{sh}\rho. \tag{11.2}$$

由余弦定律II，我们又有

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=\text{ch}(\sigma+\rho). \tag{11.3}$$

练习1 证明双曲余弦的和角公式：

$$\text{ch}(x+y)=\text{ch}x\text{ch}y+\text{sh}x\text{sh}y.$$

由双曲余弦的和角公式，可将(11.3)改写成

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=(\text{ch}\sigma\text{ch}\rho+\text{sh}\sigma\text{sh}\rho)\sin\alpha\sin\beta \tag{11.4}$$

也即

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma-\text{sh}\sigma\text{sh}\rho\sin\alpha\sin\beta=\text{ch}\sigma\text{ch}\rho\sin\alpha\sin\beta \tag{11.5}$$

对于上式两端平方即有

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma-\text{sh}\sigma\sin\alpha\text{sh}\rho\sin\beta)^2\\&=\sin^2\alpha\text{ch}^2\sigma\sin^2\beta\text{ch}^2\rho\\&=\sin^2\alpha(1+\text{sh}^2\sigma)\sin^2\beta(1+\text{sh}^2\rho)\\&=[(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha\text{sh}^2\sigma][(1-\cos^2\beta)+\sin^2\beta\text{sh}^2\rho]\end{aligned}$$

再将上式中两端的$\sin\alpha\text{sh}\sigma$及$\sin\beta\text{sh}\rho$分别换成(11.1)与(11.2)的左端部分，然后乘开并化简即得到

$$\operatorname{th}^2 r=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1}{2(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)}. \tag{11.6}$$

由此公式看出，三角形的内切圆半径唯一地由三个内角的余弦值决定。

现在提出这样一个问题：是否三角形的内切圆的半径可以任意大？

回答是否定的。结论是无论三角形的边多么长，其内切圆的半径将不能超过一个固定数。

可以证明表达式(11.6)的右端在α，β，γ都是0时达到最大值①。于是

$$\operatorname{th}^2 r\leqslant 1/4,$$

也即

$$\operatorname{th} r\leqslant 1/2.$$

由此推出

$$r\leqslant\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 3.$$

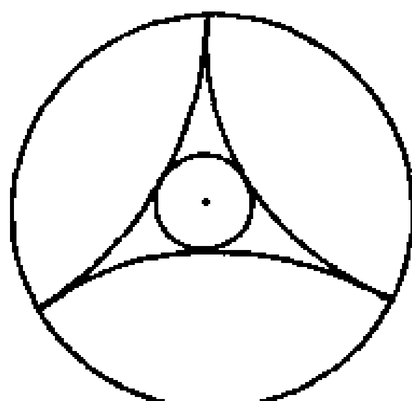


图2—11.2

r的这个上界是最佳上界，也即不能再改小了。事实上，在(11.6)中令$\alpha=\beta=\gamma$并令$\alpha\to 0$则r趋于上述上界。这个上界恰好是一个退化三角形的内切圆之半径，见图2—11.2。

上述讨论告诉我们，在非欧几何中当半径大到一定程度之后，非欧圆周就不再有外切三角形。这件事在庞卡莱模型下是很容易被接受的，但是如果没有这个模型人们就很难接受它，并且很难想象会有这样的事。

①证明这一点要用微积分。如果不打算求得r的精确上界，读者可用初等办法证明$r\leqslant\log 3$，见本章末习题。

§12 任意三角形总有外接圆吗?

在非欧几何中，这个问题的回答是否定的。

这个问题相当于下述问题：是否任意三角形的三边的垂直平分线总交于一点?

在非欧几何中，任意线段的垂直平分线总是存在的，并且垂直平分线上任意一点到已知线段两端的距离相等（用全同三角形证）。反过来，任意一点若到线段两端距离相等则必落在线段的垂直平分线上。

有了这些说明之后，我们便不难看出：若给定的三角形有两条边的垂直平分线相交于一点，则该交点一定落在第三条边的垂直平分线上。换句话说，若有两边的垂直平分线相交，则三条边的垂直平分线必交于一点。

在欧氏几何中三角形任意两边的垂直平分线不可能不相交。但在非欧几何中这种可能性却存在！见图2—12.1。

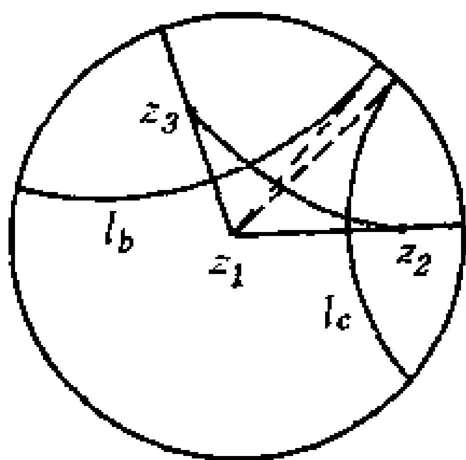


图2—12.1

很自然地会问：在怎样的条件下才会发生两边的垂直平分线不相交呢?

我们还是来考查图2—12.1中的非欧三角形$\triangle z_1z_2z_3$。我们假定z_1，z_2，z_3的对边的边长分别为a,b，c，并记b边与c边的垂直平分线分别为l_b与l_c。

显然，l_b与l_c在单位圆内不相交的充要条件是

$$\alpha \geqslant L\left(\frac{b}{2}\right)+L\left(\frac{c}{2}\right), \qquad (12.1)$$

其中α代表顶点z_1处的内角，L是罗巴切夫斯基函数，也就是说，$L(b/2)$与$L(c/2)$分别是点z_1关于l_b与l_c的平行角。

这就是说，当一顶点处的内角相对于其邻边的长度大到一定程度时，三角形就不可能有外接圆。大到怎样的程度，这是很容易由(12.1)计算的：

$$\alpha \geqslant \arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{b}{2}\right)^{-1}+\arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{c}{2}\right)^{-1}. \qquad (12.2)$$

我们称$\arcsin(\mathrm{ch}\,b/2)^{-1}+\arcsin(\mathrm{ch}\,c/2)^{-1}$为顶点$z_1$处的**临界角**。当$b$边与$c$边增长时，临界角变小，而当$b$边与$c$边减小时，临界角变大。

当三角形一顶点处的内角大于或等于其临界角时，其三边的垂直平分线彼此不相交(即平行或超平行)，且三角形不存在外接圆。

当三角形一顶点处的内角小于其临界角时，其三边的垂直平分线相交于一点。该点是三角形外接圆之圆心。

§13 三角形的面积不能任意大

这条结论大约是非欧几何中最不容易接受的命题之一。在欧氏几何的熏陶下，人们习以为常地认为当三角形的三边很大时其面积一定很大。现在非欧几何告诉我们，无论三角形的顶点相距多远，三角形的面积总不超过一个固定值。——这真是“岂有此理”!

其实，三角形的面积可否任意大这件事等价于欧几里德的

平行公设是否成立。

著名数学家高斯早就注意到了这一点。他在1799年写给波里埃的信中说道：

“至于说到我，我在我的工作中已取得一些进展。然而，我选择的道路决不能导致我们寻求的目标[证明平行公设]，而你让我确信你已达到。这似乎反而迫使我怀疑几何本身的真理性。诚然，我所得到的许多东西，在大多数人看来都可以认为是一种证明；而在我眼中它却什么也没有证明。例如，如果我们能够证明可以存在一个直线三角形，它的面积大于任何给定的面积的话，那末我立即能绝对严密地证明全部欧氏几何。

大多数人肯定会把这个当作公理；但是我，不！实际上，三角形的三个顶点无论取多么远，它的面积可能永远小于一定的极限。”

在高斯的这封信中，清楚地表明他已经认识到三角形面积可以任意大蕴含着欧几里德第五公设成立，并且他宁肯认为三角形面积不能任意大而不愿意把三角形面积可以任意大作为公理承认。只有像高斯这样伟大的数学家才有如此胆识！

现在，我们着手解释在非欧几何中为什么三角形的面积不能任意大。

先引入角欠的概念。在非欧平面上，由若干条直线段组成的一个多边形被称之为凸的，如果其中任意两个顶点之连线均不落在多边形之外。任意一个凸多边形总可以用顶点间的连线分解成$n-2$个三角形之并，这里n是多边形的边数。由于每个三角形之内角和小于π，故凸的n边形的内角和小于$(n-2)\pi$。设一凸多边形T的内角为α_1，…，α_n，则差

$$(n-2)\pi-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$$

被称作T的角欠，记为$\sigma(T)$。

在欧氏几何中，角欠总是零。但在非欧几何中，角欠总是正的。

很明显，角欠有如下的性质：

(i) 若两个凸多边形T_1与T_2全同(也即经过一个运动使T_1与T_2重合)，则$\sigma(T_1)=\sigma(T_2)$；

(ii) 若凸多边形T被一直线所截而分解成两个多边形T_1与T_2之并，则$\sigma(T)=\sigma(T_1)+\sigma(T_2)$，见图2—13.1。

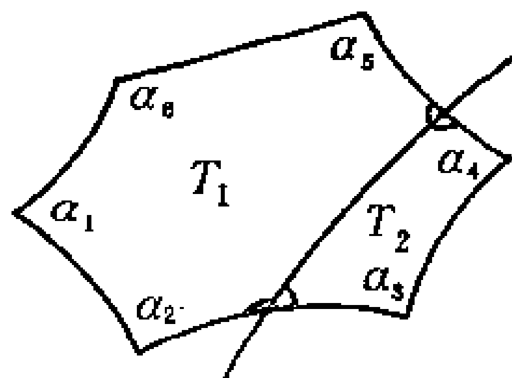


图2—13.1

令人感到意外的是在非欧几何中，角欠与面积有一定的联系。

什么是面积？我们不打算给出面积的严格定义。但是我们确信一个图形（如多边形)T的面积s是由T确定的一个正数（记为$s(T)$)，它至少有下列两条基本性质：

(i) 若T_1与T_2全同，则$s(T_1)=s(T_2)$；

(ii) 若T被分解为T_1与T_2之并，则$s(T)=s(T_1)+s(T_2)$。

从性质上看它们多么与角欠的相似。

命题13.1 若两个三角形角欠相等且有一组对应边等长则两个三角形的面积相等。

证 设有两个三角形：$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$，它们的角欠相等且z_1的对边与w_1的对边等长。

在$\overline{z_1z_2}$与$\overline{z_1z_3}$边分别取中点ξ与η，用非欧直线l连结ξ与η，然后自点z_1向l作垂线，设垂足为ζ。取$\zeta_1\in l$使得$d(\zeta_1, \xi)=d(\xi,\zeta)$，且$\zeta$与$\zeta_1$分居于$\xi$的两侧(除非$\xi$与$\zeta$重合)。再用类似的办法取定点$\zeta_2$。连结$\zeta_1$与$z_2$，$\zeta_2$与$z_3$，即得到一个海雅姆-萨

开里四边形，记之为T_1。完全以同样的办法，关于$\triangle w_1w_2w_3$又得到另一个海雅姆-萨开里四边形，记之为T_2。

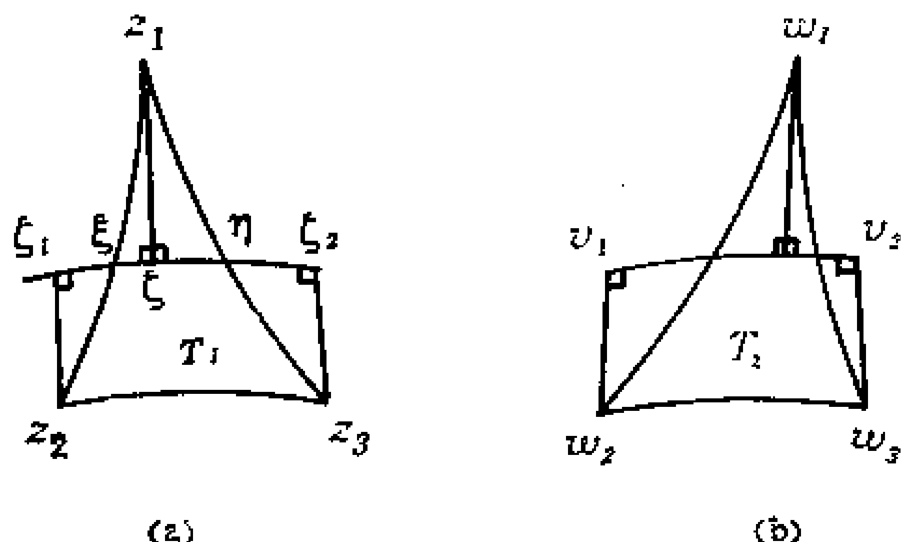


图2—13.2

根据面积的性质(i)与(ii)，并注意到$\triangle z_1\zeta\eta$与$\triangle z_3\zeta_2\eta$全同及$\triangle z_1\zeta\xi$与$\triangle z_2\zeta_1\xi$全同，不难看出$\triangle z_1z_2z_3$的面积等于T_1的面积。同理，$\triangle w_1w_2w_3$的面积等于T_2的面积。

根据角欠的性质(i)与(ii)，又不难看出$\triangle z_1z_2z_3$与T_1有相同的角欠，而$\triangle w_1w_2w_3$与T_2有相同的角欠。另一方面，两个三角形角欠相等，故T_1与T_2有相同的角欠。这进一步意味着它们的底角相等。

通过运动使底边w_2w_3移至z_2z_3，并使T_2的两腰分别与T^1的两腰重合，这时若v_1及v_2不分别与ζ_1及ζ_2重合，则必得到一个矩形$v_1v_2\zeta_2\zeta_1$，见图2—13.3。这与已证明的矩形之不存在矛盾。于是T_1与T_2全同。特别地，它们的面积相等。由此推出原来两个三角形有相同的面积。证毕。

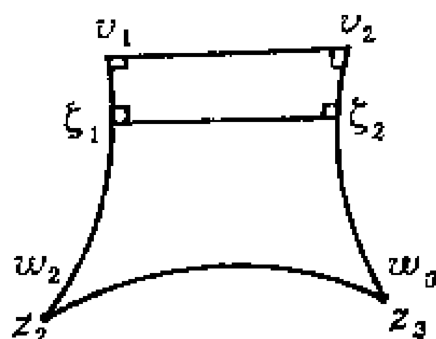


图2—13.3

现在我们进一步说明命题13.1中的一组对应边相等这一条件是多

余的，也就是说，若两个三角形的角欠相等，则它们的面积相等。

假定$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle w_1w_2w_3$的角欠相等，但$\overline{z_1z_2}$与$\overline{w_1w_2}$边长不等，不妨设后者较长。借用图2—13.2中(a)，考虑海雅姆-萨开里四边形$\zeta_1\zeta_2z_3z_2$，其中过ξ与η的直线记为l。由于$\overline{w_1w_2}$的长度大于$\overline{z_1z_2}$的长度，故$\overline{w_1w_2}$的长度的一半一定大于四边形$\zeta_1\zeta_2z_3z_2$的腰长。这样，在l上存在一点ξ'使得z_2到ξ'的距离恰好是$\overline{w_1w_2}$长度的一半。连结z_2与ξ'并延长至点z_1'，使得ξ'恰好是中点。再连结z_1'与z_3，则不难证明$\triangle z_1'z_2z_3$同样以四边形$\zeta_1\zeta_2z_3z_2$为其海雅姆-萨开里四边形。这样，$\triangle z_1'z_2z_3$的角欠和四边形$\zeta_1\zeta_2z_3z_2$的角欠相等，因而$\triangle z_1'z_2z_3$与$\triangle z_1z_2z_3$的角欠相等。

总之，我们有三个三角形：$\triangle z_1z_2z_3$，$\triangle z_1'z_2z_3$，$\triangle w_1w_2w_3$，它们的角欠相等，并且前两个三角形与后两个三角形中都各有一组边对应相等。于是两次应用命题13.1就得到第一个与第三个三角形面积相等。也就是说，我们证明了

命题13.2 角欠相等的三角形面积相等。

设$s=f(\sigma)$是三角形角欠σ与其面积s的对应关系。又设三角形$\triangle$的角欠为σ，将$\triangle$分解为两个三角形$\triangle_1$与$\triangle_2$之并。假定σ_1与σ_2分别是$\triangle_1$与$\triangle_2$的角欠，那么$\sigma=\sigma_1+\sigma_2$。又假定s_1与s_2分别是$\triangle_1$与$\triangle_2$的面积，那么$s_1=f(\sigma_1)$，$s_2=f(\sigma_2)$，且有$s_1+s_2=f(\sigma)$，也即

$$f(\sigma_1+\sigma_2)=f(\sigma_1)+f(\sigma_2). \qquad (13.1)$$

定义在正实轴上的一个实函数，若满足上述关系式则一定是线性函数，也即存在常数k使得

$$f(\sigma)=k\sigma, \qquad (13.2)$$

也即三角形的面积

$$s=k(\pi-\alpha-\beta-\gamma), \tag{13.3}$$

其中α,β,γ为三角形的三个内角。

在公式（13.2）与（13.3）中的常数k依赖于面积单位或长度单位的选取。在庞卡莱模型中，我们定义了两点间的非欧长度，实际上是给出了长度单位。因此，我们应当能定出常数的大小。下面将看到这时k恰好是1。

公式(13.2)与(13.3)对于一切三角形都成立，为了定出k的值，我们考虑特殊的三角形。设$\triangle_r$是一个非欧直角三角形，其顶点为o，r，ri，其中r是充分小的正数。记s_r为$\triangle_r$的非欧面积，σ_r为$\triangle_r$的角欠。根据公式应有

$$s_r=k\sigma_r \tag{13.4}$$

因此，$$k=\lim_{r\to 0}\frac{s_r}{\sigma_r} \tag{13.5}$$

设$\rho(z)$是z处的非欧度量密度，也即

$$\rho(z)=\frac{2}{1-|z|^2},\quad z\in U.$$

我们已经知道$\rho(z)$代表非欧长度对欧氏长度在点z的换算率，也就是在z点附近，单位欧氏长度的$\rho(z)$倍等于相应的非欧长度。这样一来，在z点附近，单位欧氏面积的$\rho^2(z)$倍等于相应的非欧面积。在这种看法下，我们有估计式

$$m(\triangle_r)\min_{z\in\triangle_r}\rho^2(z)\leqslant s_r\leqslant m(\triangle_r)\cdot\max_{z\in\triangle_r}\rho^2(z) \tag{13.6}$$

其中$m(\triangle_r)$表示$\triangle_r$的欧氏面积，而$\max\limits_{z\in\triangle_r}\rho^2(z)$与$\min\limits_{z\in\triangle_r}\rho^2(z)$分别表示$\rho^2(z)$在$\triangle_r$内的最大值与最小值。

根据三角形$\triangle_r$的取法及$\rho(z)$的表示式，我们有

$$\min_{z\in\triangle_r}\rho^2(z)=4,\qquad \max_{z\in\triangle_r}\rho^2(z)=\frac{4}{(1-r^2)^2}.$$

于是不等式(13.6)变成

$$4m(\triangle_r)\leqslant s_r\leqslant\frac{4}{(1-r^2)^2}m(\triangle_r). \tag{13.7}$$

现在我们来计算$m(\triangle_r)$与σ_r。

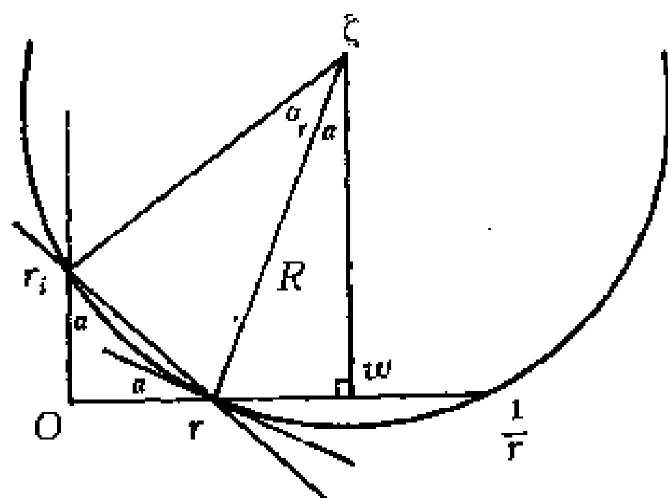


图2—13.4

设$\triangle_r$的非直角边所在的圆周为C。则C与单位圆周S正交(在图2—13.4中未画出S)。这样点r关于S的对称点$1/r$也在C上。设C的圆心为ζ，半径为R。自ζ向弦$[r, 1/r]$作垂线$\overline{\zeta w}$并连结$\overline{\zeta r}$，很容易看出$\triangle_r$的锐角等于$\angle r\zeta w$，记之为α_r。则$\sigma_r=\pi/2-2\alpha$,并有

$$R=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\Big/\sin\alpha_r. \tag{13.8}$$

连结ζ与ri，很容易看出此连线与$\overline{\zeta r}$之夹角恰好等于$\triangle_r$的角欠σ_r(请读者证明这一点)。这样，$\triangle_r$的欧氏面积

$$m(\triangle r)=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}R^2(\sigma_r-\sin\sigma_r). \tag{13.9}$$

另外一方面，我们又有

$$R\sin\frac{\sigma_r}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r,$$

由(13.8)此式可写成

$$\left(\frac{1}{r}-r\right)\sin\frac{\sigma_r}{2}=\sqrt{2}\,r\sin\alpha_r. \qquad (13.10)$$

注意到极限$(\sin x)/x\to1(x\to0)$及$r\to0$时$\sigma_r\to0$①，我们得到

$$\lim_{r\to0}\frac{\sin\frac{\sigma_r}{2}}{\frac{\sigma_r}{2}}=1.$$

由(13.10) 即有

$$\lim_{r\to0}\frac{2\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\sqrt{2}\sin\alpha_r}{\sigma_r}=1.$$

从$\sigma_r\to0(r\to0)$ 立即推出$\alpha_r\to\pi/4(r\to0)$。这样上式可改写成

$$\lim_{r\to0}\frac{2r^2}{\sigma_r}=1 \qquad (13.11)$$

对不等式(13.7)的各项各除以σ_r然后取极限即得到

$$\lim_{r\to0}\frac{s_r}{\sigma_r}=4\lim_{r\to0}\frac{m(\triangle_r)}{\sigma_r}. \qquad (13.12)$$

由(13.9)及(13.11)，我们有

$$\lim_{r\to0}\frac{m(\triangle_r)}{\sigma_r}=\lim_{r\to0}\frac{r^2}{2\sigma_r}-\lim_{r\to0}\frac{1}{2}R^2\left(1-\frac{\sin\sigma_r}{\sigma_r}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\lim_{r\to0}\left(\frac{1}{r}-r\right)^2\left(1-\frac{\sin\alpha_r}{\sigma_r}\right)\Big/\sin^2\alpha_r$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lim_{r\to0}\left(\frac{1}{r}-r\right)^2\left(1-\frac{\sin\sigma_r}{\sigma_r}\right).$$

下面我们要证明上式右端之极限为零．由台劳公式②有

---

① 当$r\to0$时，$\triangle_r$的非欧面积趋于零故其角欠也趋于零。

② 台劳(Taylor)，1685—1731.

$$\frac{\sin\sigma_r}{\sigma_r}=1-\frac{1}{6}\sigma_r^2+\cdots$$

故

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{r}-r\right)^2\left(1-\frac{\sin\sigma_r}{\sigma_r}\right)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\sigma_r^2}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{r\to 0}\frac{\sigma_r}{r^2}\cdot\sigma_r$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{r\to 0}\sigma_r=0.$$

不了解台劳公式的读者直接承认这个极限为零就是了。由直观上看承认这一点并不困难。大家知道这一项的产生是由弓形引起的。这一项极限为零就相当于说，当$r\to 0$时弓形的面积与三角形的面积相比可以忽略不计。这在直观上是可以接受的。

总之，我们证明了

$$\lim_{r\to 0}\frac{s_r}{\sigma_r}=1.$$

回忆(13.5)式即推出$k=1$，也就是说三角形的非欧面积公式是

$$s=\pi-\alpha-\beta-\gamma$$

其中α，β，γ是三个内角。

由此又推出：任意三角形的面积$\leqslant\pi$，无论其边有多长。

n边凸多边形的非欧面积公式是

$$s=(n-2)\pi-\alpha_1-\cdots-\alpha_n$$

其中α_1，$\cdots$，α_n为多边形之内角。

最后我们返到本节开始时提到的问题上，即三角形面积不超过一个固定数，这在直观上很难接受。这主要原因在于欧氏几何的观念在人们的头脑中根深蒂固。在面积问题上，长乘宽等于矩形的面积，底乘高之半是三角形的面积，这些公式已经

习以为常。在欧氏几何里三角形三个顶点趋于无穷，当然意味着底与高之积无限增大。但是，在非欧几何里这些公式统统不成立了。这首先是因为矩形之不存在。欧氏几何中三角形面积公式基于矩形面积公式，而矩形面积公式又基于这样的观察：一个矩形中包含了长乘以宽这么多个单位正方形。但在非欧几何中没有矩形更谈不上正方形。这使得我们失去了用正方形直接定义面积的可能，同时使得三角形中底乘以高失去了几何的意义，这个积不再跟面积相关。当非欧三角形三个顶点趋向无穷时，底乘以高的积是无限增大，但面积却不然。因此，"忘掉"欧氏几何中的公式才能接受现在的结论。

在非欧三角形中，随着顶点趋于无穷，邻边靠近的程度也就增大。边的增大对面积的增大是不成比例的。因此，顶点趋于无穷并没有导致面积的无限增大。

在结束本节时还应该指出：三角形△的非欧面积s可以通过重积分表示：

$$s=\iint_{\triangle}\rho^2(x+iy)dxdy$$

$$=\iint_{\triangle}\frac{4dxdy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

熟悉微积分的读者不妨试着用积分证明三角形的面积公式。但是这也要花相当的力气，决非举手之劳。一般书上只在用上半平面作为非欧几何模型的时候证明这个公式，因为这时度量密度变得简单，积分易于处理。

§14 非欧圆

到一点z_0的非欧距离小于给定正数r的集合：

$$D=\{z\in U:\ d(z_0,z)<r\}$$

被称为非欧圆，这里z_0被称为圆心，r被称为(非欧)半径

因此，任意一个以r为半径的非欧圆周的周长是

$$\frac{4\pi\text{th}\frac{r}{2}}{1-\text{th}^2\frac{r}{2}}=2\pi\text{sh}r.$$

这里用到公式 $2\text{sh}x\text{ch}x=\text{sh}2x$。我们用$L$表示以$r$ 为半径的非欧圆周之非欧长度，则有公式

$$L=2\pi\text{sh}r. \tag{14.1}$$

它告诉我们在非欧几何中圆周长不再与半径成正比，而是与半径的双曲正弦成正比。这就是说，当半径增大时，圆周的周长将以很高的速度增大。

现在我们讨论非欧圆的面积。为此我们先来考虑一个扇形的非欧面积。

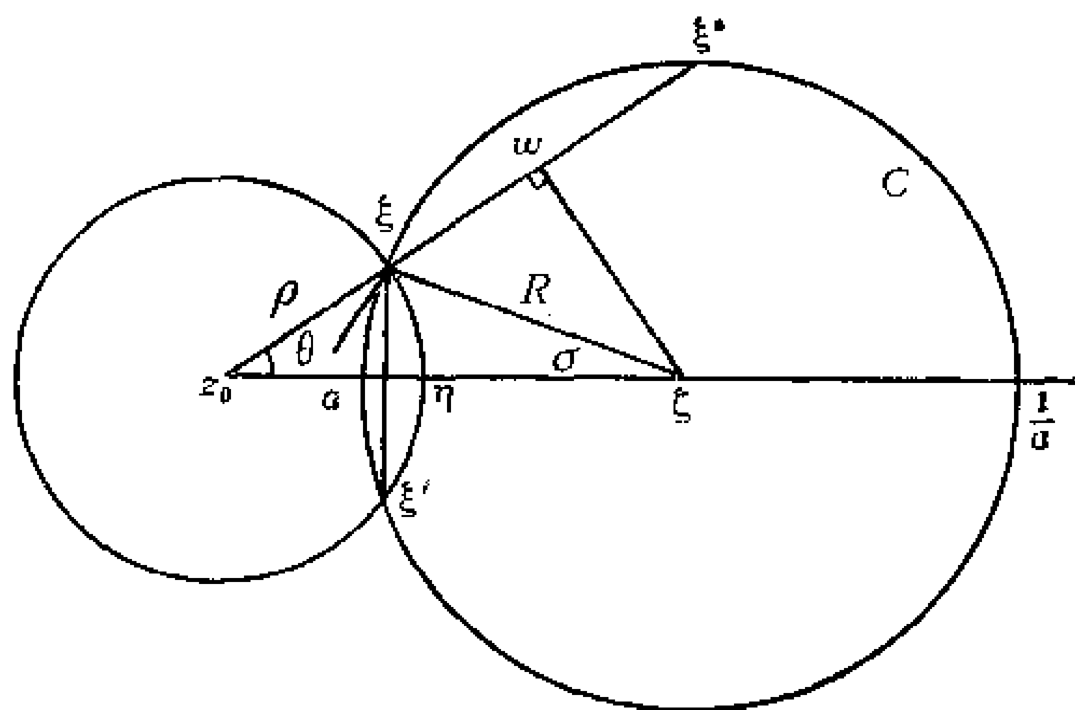


图2—14.1

考虑扇形$z_0\xi\eta$，其中$z_0=0$，η落在正实轴上，扇形的半径为ρ(欧氏长度)，扇形的中心角为θ。设ξ'是点ξ关于实轴之对称点。过点ξ及ξ'作圆周C，使之与单位圆周S正交(S在图2—14.1

中未画出）。设点$a(a<1)$是C与正实轴的一个交点，那么点a关于S的对称点，也即点 $1/a$，一定也落在C上。这时C 的圆心为$\zeta=(1/a+a)/2$，而C的半径$R=(1/a-a)/2$。

连结z_0与ξ并延长之，与C交于点ξ^*。则ξ^*是点ξ关于S的对称点。于是

$$|\xi^*-\xi|=\frac{1}{\rho}-\rho.$$

又自圆心ζ向弦$\overline{\xi\xi^*}$作中垂线交弦于w。由图2—14.1有

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right). \tag{14.2}$$

另一方面，若σ是图2—14.1所示的夹角，则有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-a\right)\sin\sigma=\rho\sin\theta. \tag{14.3}$$

于是由(14.2)及(14.3)有

$$a=\frac{\rho+\dfrac{1}{\rho}}{2\cos\theta}-\frac{\rho\sin\theta}{\sin\sigma},$$

$$\frac{1}{a}=\frac{\rho+\dfrac{1}{\rho}}{2\cos\theta}+\frac{\rho\sin\theta}{\sin\sigma}.$$

以上两式相乘即又得

$$1=\frac{\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2}{4\cos^2\theta}-\frac{\rho^2\sin^2\theta}{\sin^2\sigma}.$$

也即

$$4\sin^2\sigma\cos^2\theta=\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\sin^2\sigma-4\rho^2\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

从这个等式中解出$\sin\sigma$即有

$$\sin\sigma = \frac{2\rho\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\theta}}. \tag{14.4}$$

我们将以z_0，ξ和a为顶点的非欧三角形记作$\triangle_\theta$。则$\triangle_\theta$是一个直角三角形。根据弦切角与中心角的关系，很容易证明，σ恰好等于在ξ点处C的切线与弦$\overline{\xi\xi'}$的夹角。设$\triangle_\theta$在顶点ξ的内角为β。这样，我们有

$$\theta+\beta+\sigma=\frac{\pi}{2}$$

也即 $$\sigma=\frac{\pi}{2}-\theta-\beta.$$

也就是说，σ恰好是$\triangle_\theta$的角欠，也即$\triangle_\theta$的非欧面积。

现在我们令

$$\theta_n=\frac{2\pi}{n},\ n=1,2,\cdots.$$

又令σ_n是$\triangle_{\theta_n}$的非欧面积。则由(14.4)有

$$\sin\sigma_n = \frac{2\rho\sin\theta_n\cos\theta_n}{\sqrt{\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\theta_n}} \tag{14.5}$$

另一方面，当n充分大时，也即θ_n充分小时，$\triangle_{\theta_n}$的非欧面积和以ρ为半径、θ_n为中心角的扇形的非欧面积相差无几。于是，若A是以原点为中心、以ρ为半径（欧氏）的圆的非欧面积，则

$$A=\lim_{n\to\infty} n\sigma_n. \tag{14.6}$$

利用极限 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{14.7}$$

并注意到 $n\to\infty$ 时 $\sigma_n\to 0$，我们有

$$A=\lim_{n\to\infty} n\sin\sigma_n,$$

也即

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\rho\sin\theta_n\cos\theta_n}{\sqrt{\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2-4\cos^2\theta_n}} \qquad (14.8)$$

再次利用(14.7)有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\sin\theta_n&=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\dfrac{2\pi}{n}}\\ &=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\\ &=2\pi.\end{aligned}$$

注意到 $\cos\theta_n\to 1(n\to\infty)$，由(14.8)立即推得

$$\begin{aligned}A&=\frac{4\pi\rho}{\sqrt{\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2-4}}\\ &=\frac{4\pi\rho^2}{1-\rho^2}.\end{aligned}$$

这里 ρ 是圆的欧氏半径。若设该圆的非欧半径为 r，那么 $\rho=\text{th}(r/2)$。于是，我们有

$$A=\frac{4\pi\,\text{th}^2\dfrac{r}{2}}{1-\text{th}^2\dfrac{r}{2}}=4\pi\,\text{sh}^2\frac{r}{2}.$$

总之，我们证明了任意一个以 r 为半径的非欧圆的非欧面积 A 有如下的公式

$$A=4\pi\,\text{sh}^2\frac{r}{2}. \qquad (14.9)$$

由此看出当$r\to\infty$时，A以r的指数次方趋于无穷。又因为

$$A=4\pi\cdot\frac{(e^{r/2}-e^{-r/2})^2}{4}$$

$$=\pi(e^r+e^{-r}-2),$$

而 $$L=\pi(e^r-e^{-r}),$$

故当$r\to\infty$时，非欧圆的面积与其周长之比趋向于1。这与欧氏几何中的情形大不相同。在欧氏几何中，圆的面积与其周长的平方成正比，当半径趋于无穷时圆的面积与其周长之比趋于无穷。

§15 极限圆周——一种欧氏几何中没有的圆周

在欧氏几何中，直线与圆周是两种基本曲线。但在非欧几何中，除了直线与圆周之外，还有两种曲线，那就是极限圆周与超圆周。

在经典的罗巴切夫斯基几何中，极限圆及超圆的概念起着十分重要的作用。

本节中先讨论极限圆及其圆周。

在欧氏几何中，过给定的两点作圆周C。当C的半径趋向于无穷时，C的极限是过给定两点之直线。在非欧几何中不成立了。

设z_1与z_2是U内任意两点。考虑过z_1与z_2的任意一个非欧圆周C。根据上节中的说明C也是一个欧氏圆周。显然，当C的非欧半径无限增大时，C的极限是一个切于单位圆周S的欧氏圆周(见图2—15.1)。这个欧氏圆周既不是非欧圆周，也不是非欧直线，我们给它起一个专门的名字：极限圆周，或者无限远

圆周。在欧氏几何中很难找出这种曲线的对应物。

包含于极限圆周内部的点集合被称为极限圆。

极限圆或极限圆周可以看作是圆心在无穷远的圆或圆周，其圆心是它与S的切点。

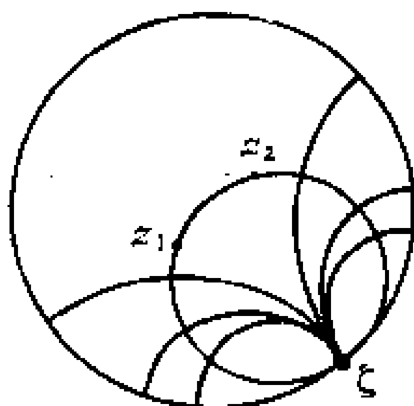


图2—15.1

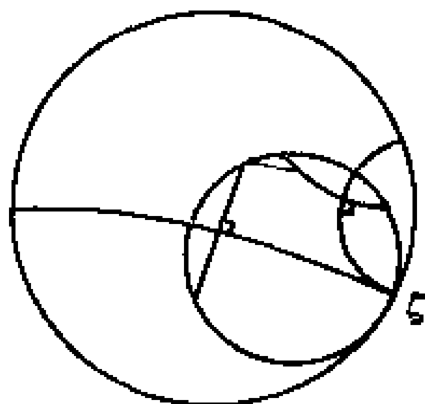


图2—15.2

极限圆仍然保留着某些非欧圆的共同性质。如过非欧圆之圆心的任意一条非欧直线一定与非欧圆周正交。（这一命题请读者自己证明。提示，当非欧圆之圆心取在原点时这一命题显然成立。）对于极限圆而言，任意一条趋向于极限圆之圆心的非欧直线一定与极限圆周正交，见图2—15.1。又如，非欧圆周的弦的垂直平分线（非欧）一定通非欧圆之圆心。（这一命题也请读者自己证明。）对于极限圆而言这一命题也成立，见图2—15.2。

另外，两个相切的非欧圆周，两圆之圆心的非欧连线一定通过切点。对于极限圆也有类似的命题：设C_1与C_2是两个相切于有穷点的极限圆周。又设ζ_1与ζ_2分别是C_1与C_2的圆心。若非欧直线l的两端分别趋向于ζ_1与ζ_2，则l必通过两极限圆周的切点，见图2—15.3。证明是十分容易的，只要将C_1与C_2的切点用非欧运动移至原点就一目了然了。

令人有点意外的是，所有的极限圆都是全同的。也就是说，任意两个极限圆都可以经过适当的非欧运动使它们完全重合。

设D_1与D_2是两个任意给定的极限圆，C_1与C_2分别是它们的边界，ζ_1与ζ_2分别是它们的圆心。在C_1与C_2上分别取定一点z_1与z_2。取两个保持单位圆U不变的分式线性变换f_1与f_2，使得$f_1(z_1)=0, f_2(z_2)=0$。这时$f_1(C_1)$与$f_2(C_2)$是两个通过原点的极限圆周。设$w_1=f_1(\zeta_1), w_2=f_2(\zeta_2)$。则$w_1$与$w_2$分别是$f_1(C_1)$与$f_2(C_2)$跟单位圆周的切点。再经过一个旋转变换$g$，即可将$w_1$移至$w_2$。这时$g(f_1(C_1))$与$f_2(C_2)$是都切于$w_2$且通过原点的圆周，必定重合在一起。于是，$g(f_1(D_1))$也必与$f_2(D_2)$重合。见图2—15.4(a)与(b)。

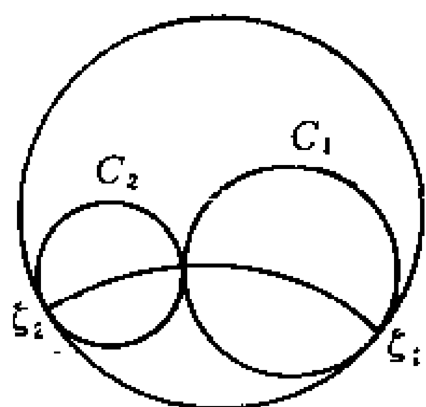
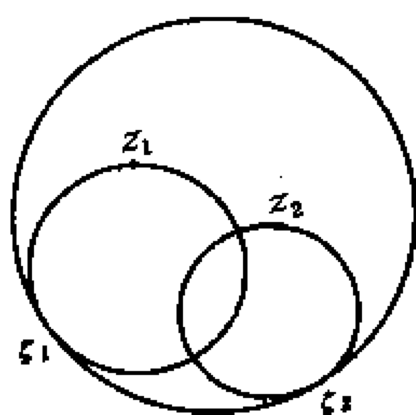
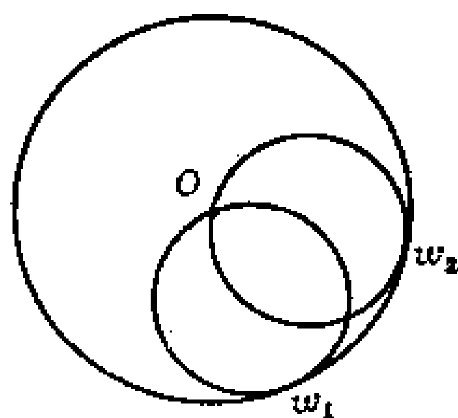


图2—15.3



(a)



(b)

图2—15.4

在图2—15.5中画出了大大小小的极限圆。尽管它们看上去大小各异，甚至一个包含于另一个之中，但是根据上述结论，它们彼此都是全同的。真奇怪，一个极限圆居然跟它的一个真子集合全同！也就是说，一个极限圆不仅可以跟它的一个真子

集合建立一个1-1对应，而且这个对应保持非欧距离不变.你能解释这一现象吗?

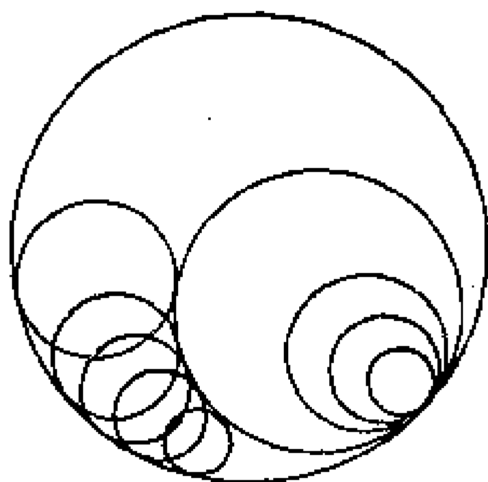


图2—15.5

§16 超圆周——另一种欧氏几何中没有的圆周

在欧氏几何里，到一已知直线的距离小于一个固定数d的点集合是一个带形域，其边界是在已知直线两侧的两条平行线。这一命题在非欧几何中会怎样呢?

设l是一条给定的非欧直线。记$d(z, l)$是点z到l的非欧距离(见§6)。又设$d>0$是任意给定的正数。我们称集合

$$D=\{z\in U: d(z, l)<d\}$$

为关于l的一个超圆域。

首先，我们应当弄清超圆域的边界是什么?

超圆域的边界不是平行于已知非欧直线的非欧直线，因为平行线间的距离不是一个常数。这一点与欧氏几何中情况不同了.

下面我们证明，超圆域的边界是落在已知非欧直线两侧的

两个欧氏圆弧。

不失一般性，假定已知非欧直线l是实轴上的区间$(-1,1)$。这时超圆域D的边界是

$$\{z\in U:\ d(z,\ l)=d\}.$$

它显然有两支，上半圆中一支，下半圆中一支。只讨论上半圆中的一支就足够了。设

$$C=\{z\in U:\ d(z,\ l)=d,\ \operatorname{Im} z>0\}.$$

现在证明C是一个欧氏圆弧，其端点为-1与1。

设$z\in C$是任意一点，从原点到点z的连线与实轴之夹角为α。我们只须讨论$0<\alpha<\pi$的情况。在图2—16.1中考虑以0，z，ζ为顶点的直角非欧三角形。由§10中(10.1)有关系式：

$$\operatorname{sh}d=\operatorname{sh}c\ \sin\alpha,\tag{16.1}$$

其中c是点z到原点的非欧距离，也即

$$c=\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad |z|=\operatorname{th}\frac{c}{2}.\tag{16.2}$$

很容易证实，

$$\operatorname{sh}c=\frac{2\operatorname{th}\dfrac{c}{2}}{1-\operatorname{th}^2\dfrac{c}{2}}.$$

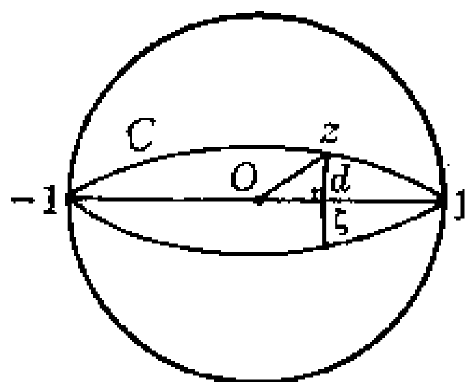


图2—16.1

于是，我们由(16.2)有

$$\operatorname{sh}c=\frac{2|z|}{1-|z|^2}.$$

这样，(16.1)可以改写为

$$1-|z|^2=2R|z|\sin\alpha,\ R=(\operatorname{sh}d)^{-1}.\tag{16.3}$$

令$z=x+iy(x,y\in \mathbf{R})$，则$y=|z|\sin\alpha$，并且有

$$1=x^2+y^2+2Ry$$

也即 $$1+R^2=x^2+(y+R)^2,\tag{16.4}$$
可见，C是一条欧氏圆弧，端点为-1及1。

这样，我们证明了超圆域的边界是两条欧氏圆弧，它们关于给定的非欧直线对称，并且与该非欧直线在单位圆周上有共同的端点。

超圆域的边界被称为超圆周。

显然，并非任意两个超圆域都全同。这取决于超圆周与已知非欧直线在端点处的交角。

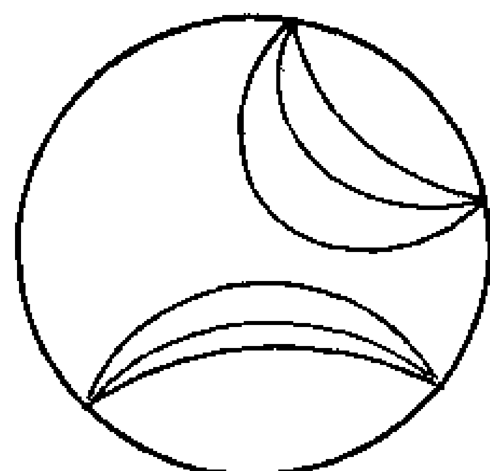


图2—16.2

回顾我们在非欧几何中所涉及的曲线：非欧直线，非欧圆周，极限圆周与超圆周。这四种曲线在庞卡莱模型中都是欧氏圆弧（包括直线弧）或圆周：

非欧直线——垂直于单位圆周的欧氏圆弧；

非欧圆周——全落在单位圆内的欧氏圆周；

极限圆周——与单位圆周相切的欧氏圆周；

超圆周——两条与单位圆周相交但非正交的欧氏圆弧。

在欧氏几何中，极限圆周与超圆周都退化成直线。故欧氏几何中只有直线与圆周。

我们已经知道，并不是所有非欧三角形都有外接的非欧圆周。现在有了极限圆周与超圆周的概念之后，我们便有下述命题（这个命题可以看作是欧氏几何中任意三角形都有外接圆周这一命题的推广）：

任意一个非欧三角形均可内接于某个非欧圆周，或极限圆周，或超圆周之内。

证明是显然的。任意一个非欧三角形，不妨假定其一个顶

点落在原点上，这时一定有一个外接之欧氏圆周C。C有三种可能，C全部落在单位圆内；C与单位圆周相切；C有一部分落在单位圆之外。这三种情况使得C在单位圆内的部分分别对应于非欧圆周，极限圆周，超圆周。

由上述讨论还可以看出：一个非欧三角形有外接非欧圆周之充要条件是它的外接欧氏圆周全部落入单位圆内。

§17 非欧运动的分类

我们知道，全部非欧运动由两类变换组成：保持单位圆不变的分式线性变换与关于非欧直线的反演变换。每一个这样的反演变换$w=f(z)$复合以关于实轴的对称变换，也即$w=\overline{f(z)}$，都是一个保持单位圆不变的分式线性变换。所以，上述两类非欧运动之间只相差一个共轭。在我们对非欧运动作进一步分类时只考虑分式线性变换就足够了。

我们还知道，在保持单位圆不变的分式线性变换中，共有三类——双曲型变换，椭圆型变换与抛物型变换。我们现在把它们所对应的非欧运动依次称为双曲型的、椭圆型的和抛物型的。

根据第一章的讨论，每个双曲型非欧运动都有两个不动点，这两个不动点落在单位圆周上。这两个不动点确定的非欧直线被称作这个运动的轴。回顾每个双曲变换均使通过两不动点的任意一个欧氏圆周不变。因此，上述轴是不变的，而且每个关于这个轴的超圆周都是不变的。这就告诉我们，在双曲非欧运动作用下，轴上的点沿着轴向前移动，而不在轴上的点沿着它所在的超圆周向前移动。见图2—17.1。

保持单位圆不变的椭圆型变换有两个不动点，它们关于单位圆周对称。任意通过这两个不动点的欧氏圆周都应垂直于单

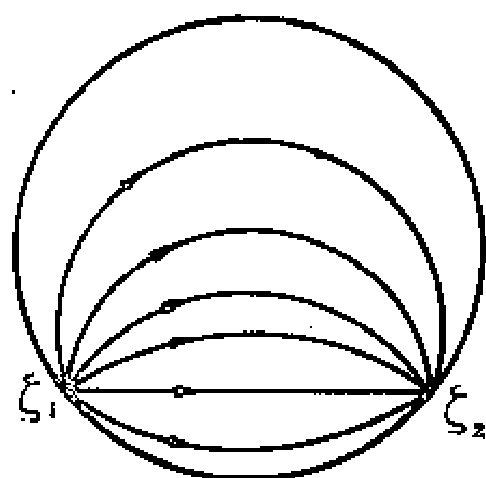


图2—17.1

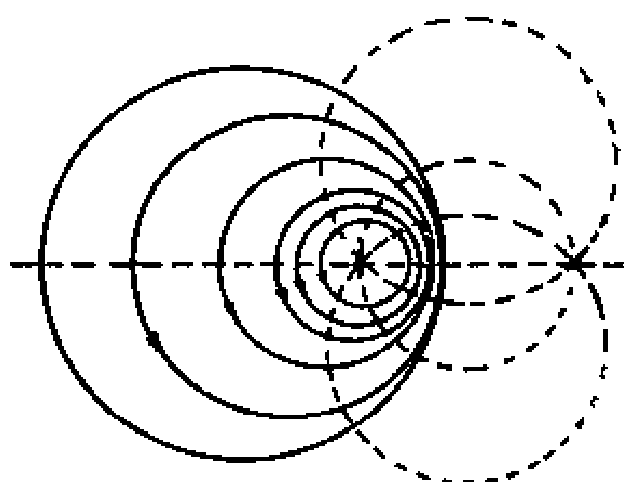


图2—17.2

位圆周，也即其落入单位圆内的部分是非欧直线，而与它们都正交的圆周是变换的不变圆周。很容易看出，这些不变圆周，要么整个圆周落在单位圆之内，要么整个圆周落在单位圆之外（或与单位圆周重合），因此，椭圆型非欧运动下，单位圆内有一族非欧圆周是不变的。另外，不难证实，这族非欧圆周以单位圆内的不动点为其共同圆心①。这样，椭圆型非欧运动在单位圆内的作用是将不动点之外的每一个点沿着一条以不动点为圆心的非欧圆周向前移动（或称为旋转），见图2—17.2

保持单位圆不变的抛物型变换的不动点（只有一个）一定落在单位圆周上。由于单位圆周是不变圆周，故与单位圆周相切于不动点的任意一个欧氏圆周都是该变换之不变圆周。因此，抛物型非欧运动保持每个以不动点为圆心的极限圆周不变。换句话说，在这种非欧运动作用之下，每一点沿着它所在的一条极

① 证明这一点的办法很多，比如，把不动点移至原点考虑，或者利用本章末习题。

限圆周向前移动，见图2—17.3。

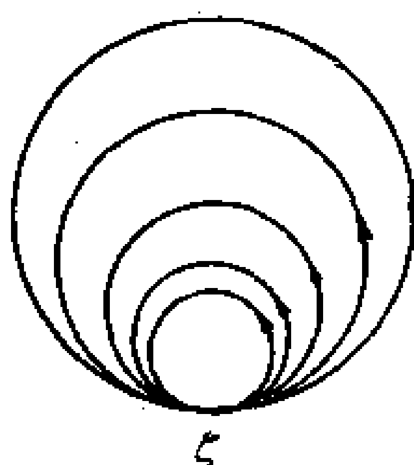


图2—17.3

我们用下表来总结上面的讨论：

非欧运动类型	不　动　点	不　变　曲　线
双曲型	有两个不动点，均落在单位圆周上。	不动点所决定的非欧直线与超圆周。
椭圆型	有一个不动点落在单位圆内(另一个在单位圆外)。	以不动点为心的非欧圆周。
抛物型	仅有一个不动点，落在单位圆周上。	以不动点为心的极限圆周。

§18　欧氏几何作为双曲几何的极限

在前面的十几节中，我们已经系统地介绍了双曲几何的基本性质。这一介绍已告一段落。在结束之前，还有两个问题须要讨论：一是欧氏几何与双曲几何之间的关系，一是非欧几何的真理性问题。本节先讨论前一个问题。我们将把欧氏几何解

释成双曲几何的一种极限状态。

现在，我们把庞卡莱模型中的单位圆换成以原点为心的、以R为半径的圆：

$$D_R=\{z\in\mathbf{C}:|z|<R\}.$$

将D_R视作非欧平面，并与前面类似地定义非欧直线与非欧距离等概念。

设C_R是D_R的边界，也即

$$C_R=\{z\in\mathbf{C}:|z|=R\}.$$

D_R内的一条圆弧（含直线弧）被称为一条非欧直线，如果它与C_R正交。

设z_1与z_2是D_R内的任意两点，过z_1与z_2作一条 非欧直线交C_R于ζ_1与ζ_2，并假定ζ_1靠近z_1。这时我们定义

$$d_R(z_1,z_2)=R\log[z_1,z_2;\ \zeta_1,\zeta_2]^{-1} \qquad (18.1)$$

为点z_1与z_2的非欧距离。很容易看出

$$d_R(0,z)=R\log\frac{R+|z|}{R-|z|},\quad \forall z\in D_R \qquad (18.2)$$

注意到分式线性变换

$$z\longmapsto\frac{R^2(z-z_1)}{R^2-\bar{z}_1z}$$

保持D_R不变并是D_R上的非欧运动，通过这个变换把z_1变成原点并应用(18.2)即得

$$d_R(z_1,z_2)=R\log\frac{|R^2-\bar{z}_1z_2|+R|z_2-z_1|}{|R^2-\bar{z}_1z_2|-R|z_2-z_1|} \qquad (18.3)$$

这个式子中就不再出现ζ_1与ζ_2。

这些公式都是以前公式的推广。令$R=1$就得到前面相应的公式。现在我们的兴趣是，当$R\to\infty$时，$d_R(z_1,z_2)$的极限是什么?

令

$$\eta_R=\frac{R|z_2-z_1|}{|R^2-\bar{z}_1z_2|} \tag{18.4}$$

则$R\to\infty$时$\eta_R\to 0$。利用极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

可以推出

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} d_R(z_1,z_2) &= \lim_{R\to\infty} R\eta_R\left[\frac{\log(1+\eta_R)}{\eta_R}-\frac{\log(1-\eta_R)}{\eta_R}\right]\\ &= \lim_{R\to\infty} 2R\eta_R\\ &= 2|z_2-z_1|。\end{aligned} \tag{18.5}$$

这就是说，当z_1与z_2固定时，令$R\to\infty$，z_1与z_2在D_R内的非欧距离的极限恰好是欧氏距离的2倍。

这里倍数2并非本质的。如果在前面我们定义非欧距离时，在(18.1)右端乘以1/2，那么这时的倍数恰好是1。在现在的定义下不论z_1与z_2固定在什么位置上，$d_R(z_1,z_2)$的极限总是欧氏距离之两倍。因此，这种极限距离就是欧氏距离，只要把单位长度加以适当调整就是了。

这样，极限(18.5)提示我们：R充分大时，D_R内的非欧几何就充分"接近"欧氏几何。现在我们来考查这一点。

设z_1与z_2是任意固定的两点。当我们把它们看作D_R内的两点时，过这两点有一条唯一的非欧直线l_R。从图形上很容易看出，当R越大时，l_R就变得越直。当$R\to\infty$时，l_R的极限是过z_1与z_2的欧氏直线。

设D_R内一点至原点的非欧距离为d，而其欧氏距离为$|z|$。那么，由(18.2)有

$$|z|=R\,\mathrm{th}\left(\frac{d}{2R}\right)。 \tag{18.6}$$

利用这一公式，重复§6中的基本步骤，即可以推出，在D_R中距离一条非欧直线的垂直距离为d的一点关于该非欧直线之平

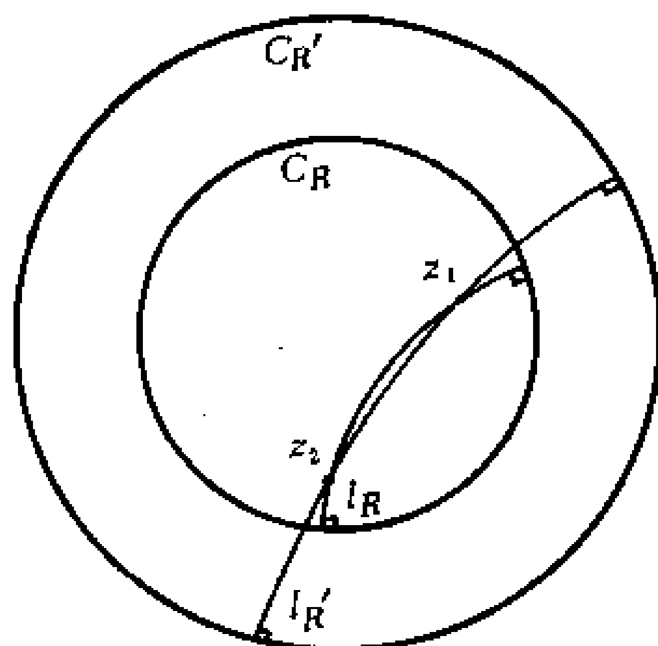


图2—18.1

行角为

$$\omega = \arc\sin\left[\operatorname{ch}\left(\frac{d}{R}\right)\right]^{-1}. \tag{18.7}$$

由此可以看出，当R越大，平行角则越接近$\pi/2$。

现在我们来考虑三角形的角欠与非欧面积。

设有固定的三个点z_1, z_2, z_3，不失一般性假定$z_1=0$。又设D_R包含此三点。在D_R的非欧度量下，以点z_1, z_2, z_3为顶点的非欧三角形记作$\triangle_R$。当R变动时，虽然三个顶点不动，但三条边随R变动而变动。记s_R为$\triangle_R$在D_R内的非欧面积，并记σ_R为$\triangle_R$的角欠。在§13中我们证明了三角形的非欧面积与其角欠成正比。检查这个证明的步骤就会发现，这一结论与非欧几何的模型的选取无关。也就是说，在D_R作为非欧平面时，这一结论依然成立。不过，非欧三角形的面积与其角欠的比例常数不一定等于1，一般说来是一个依赖于R的常数。我们记之为k_R。这样，

我们有

$$s_R = k_R \sigma_R. \tag{18.8}$$

重复§13中对单位圆情况决定常数k的基本步骤，并注意到在D_R内非欧度量的密度为

$$\rho_R(z) = \frac{2R^2}{R^2 - |z|^2}, \quad \forall z \in D_R, \tag{18.9}$$

可以求出

$$k_R = R^2. \tag{18.10}$$

（这里我们省略了公式(18.9)及(18.10)的证明，因为它与过去§13中的证明完全类似。读者不会有任何困难地将那里的证明搬到D_R的情况。）这样，我们有

$$s_R = R^2 \sigma_R \tag{18.11}$$

另一方面，若记$m(\triangle_R)$为$\triangle_R$的欧氏面积，则由公式(18.9)有

$$m(\triangle_R)\min_{\triangle_R}\rho_R^2(z) \leqslant s_R \leqslant m(\triangle_R)\max_{\triangle_R}\rho_R^2(z),$$

$$4m(\triangle_R) \leqslant s_R \leqslant m(\triangle_R)\frac{4R^4}{(R^2-u^2)^2}. \tag{18.12}$$

其中$u = \max(|z_2|, |z_3|)$（注意$z_1 = 0$）。由此推出，当$R \to \infty$时，s_R的极限恰好是以z_1, z_2, z_3为顶点的欧氏三角形的面积的4倍。

由(18.11)及(18.12)还进一步推出

$$\sigma_R \leqslant m(\triangle_R)\frac{4R^2}{(R^2-u^2)^2}.$$

用$\triangle_\infty$表示以z_1, z_2, z_3为顶点的欧氏三角形，那么显然有$m(\triangle_R) \leqslant m(\triangle_\infty)$。于是上述不等式可改写为

$$\sigma_R \leqslant m(\triangle_\infty) \cdot \frac{4R^2}{(R^2-u^2)^2} \tag{18.13}$$

由此立即推出

$$\lim_{R\to\infty}\sigma_R=0,$$

也就是说，三角形$\triangle_R$的角欠当$R\to\infty$时的极限为零。

现在我们来考查D_R内的直角三角形的公式以及关于任意三角形的正弦定律及余弦定律。

当然，仿照前面导出这些公式的步骤可以毫无困难地导出在D_R内的正弦定律、余弦定律以及有关直角三角形的公式。现在我们有一个办法不必重复过去的步骤而得到在D_R内的这些公式。

我们考虑相似变换，$f(z)=z/R$。这个变换将D_R变成单位圆，而且把D_R的非欧直线变成单位圆上的非欧直线。根据D_R中非欧距离的公式(18.3)，我们有

$$d_R(z_1,z_2)=R\log\frac{|1-\overline{w}_1w_2|+|w_2-w_1|}{|1-\overline{w}_1w_2|-|w_2-w_1|}$$

$$=Rd(w_1,w_2),$$

其中$w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$，而d表示在单位圆中的非欧距离。因为$w=f(z)$是相似变换，所以它不改变圆弧的交角。因此，D_R中的非欧三角形$\triangle$的三个内角在变换$w=f(z)$下保持不变。

设有D_R内的非欧三角形$\triangle$，其三个内角分别为α,β,γ，三个内角之对边的非欧长度分别为a,b,c。又设$\triangle'=f(\triangle)$，那么$\triangle'$的三个内角仍然是α,β,γ。设a',b',c'分别为α,β,γ的对边在单位圆内的非欧长度，那么又有

$$a'=a/R,\quad b'=b/R,\quad c'=c/R. \tag{18.14}$$

由关于$\triangle'$的正弦定律(9.1)及关系式(18.14)有

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\sin\alpha}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{R}}{\sin\beta}=\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{R}}{\sin\gamma} \tag{18.15}$$

同理，有余弦定律

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}=\operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}-\operatorname{sh}\frac{a}{R}\operatorname{sh}\frac{b}{R}\cos\gamma \tag{18.16}$$

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{18.17}$$

对于D_R内的直角三角形有下述关系式，

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}=\operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}, \tag{18.18}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R}=\operatorname{sh}\frac{c}{R}\sin\alpha, \tag{18.19}$$

$$\operatorname{th}\frac{b}{R}=\operatorname{th}\frac{c}{R}\cos\alpha, \tag{18.20}$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{R}=\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\alpha, \tag{18.21}$$

其中$\gamma=\pi/2$，a,b,c分别为α,β,γ之对边的非欧长度。

我们的目的是要把欧氏几何的公式解释为相应的双曲几何中的公式的极限。

我们取定三个点z_1,z_2,z_3，并考虑以它们为顶点的关于D_R的非欧三角形$\triangle_R$。设三个顶点处的三个内角分别为$\alpha_R,\beta_R,\gamma_R$，又设它们的对边分别为$a_R,b_R,c_R$。根据前面的讨论，$R\to\infty$时，$\alpha_R,\beta_R,\gamma_R$的极限分别是$z_1z_2z_3$所构成的欧氏三角形的三个内角，不妨记为$A$，$B$，$C$。而$R\to\infty$时，$a_R,b_R,c_R$的极限分别是$z_1z_2z_3$所构成的欧氏三角形对应边的欧氏长度的两倍。记$\bar{a}=|z_2-z_3|$，$\bar{b}=|z_1-z_3|$，$\bar{c}=|z_1-z_2|$，即有：$a_R\to2\bar{a}$，$b_R\to2\bar{b}$，$c_R\to2\bar{c}$ $(R\to\infty)$。

为后面讨论的需要，我们应当指出指数函数e^x的台劳展开式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),x\to0.$$

由此很容易推出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sh}x}{x}=1 \tag{18.22}$$

及

$$\text{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0. \tag{18.23}$$

由(18.22)有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\text{sh}\dfrac{a_R}{R}}{\dfrac{1}{R}}=2\bar{a},$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\text{sh}\dfrac{b_R}{R}}{\dfrac{1}{R}}=2\bar{b}.$$

根据正弦定律我们有

$$\frac{\text{sh}\dfrac{a_R}{R}}{\sin\alpha_R}=\frac{\text{sh}\dfrac{b_R}{R}}{\sin\beta_R}.$$

对此式两端分子上各乘以R，然后再令$R\to\infty$并取极限即得到

$$\frac{2\bar{a}}{\sin A}=\frac{2\bar{b}}{\sin B}$$

也即 $$\frac{\bar{a}}{\sin A}=\frac{\bar{b}}{\sin B}.$$

同理有 $$\frac{\bar{b}}{\sin B}=\frac{\bar{c}}{\sin c}.$$

这样我们就得到了大家熟知的正弦定律。

为了得到通常的余弦定律，我们利用展开式(18.23).这时

有

$$\mathrm{ch}\frac{c_R}{R}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{c_R}{R}\right)^2+o\left(\frac{1}{R^2}\right),\ R\to\infty,$$

$$\mathrm{ch}\frac{b_R}{R}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{b_R}{R}\right)^2+o\left(\frac{1}{R^2}\right)\quad R\to\infty,$$

$$\mathrm{ch}\frac{c_R}{R}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{c_R}{R}\right)^2+o\left(\frac{1}{R^2}\right)\quad R\to\infty.$$

于是由(18.16)得

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{c_R}{R}\right)^2=\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a_R}{R}\right)^2\right]\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b_R}{R}\right)^2\right]$$
$$-\mathrm{sh}\frac{a_R}{R}\mathrm{sh}\frac{b_R}{R}\cos\gamma_R+o\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

展开此式并把高阶无穷小量并入$o(1/R^2)$又得到

$$\frac{c_R^2}{R^2}=\frac{a_R^2}{R^2}+\frac{b_R^2}{R^2}-2\mathrm{sh}\frac{a_R}{R}\mathrm{sh}\frac{b_R}{R}\cos\gamma_R+o\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

两端乘以R^2并取极限即得

$$(2\bar{c})^2=(2\bar{a})^2+(2\bar{b})^2-2(2\bar{a})(2\bar{b})\cos C,$$

也即

$$\bar{c}^2=\bar{a}^2+\bar{b}^2-2\bar{a}\bar{b}\cos C.$$

这就是通常的余弦定律。

对于余弦定律II(即(18.17))取极限，即得到

$$\sin A\sin B=\cos A\cos B+\cos C.$$

注意到$A+B+C=\pi$，立即看出上述等式是一个恒等式.因此，在欧几里德几何中没有余弦定律II.

下面考虑直角三角形.设γ_R总是直角，对(18.18)及(18.21)取极限或作台劳展开后再取极限就得到

$$\bar{c}^2=\bar{b}^2+\bar{a}^2,\qquad \bar{a}=\bar{c}\sin A,\qquad \bar{b}=\bar{c}\cos A,$$
$$\bar{a}=\bar{b}\,\mathrm{tg}A.$$

这些便是大家都熟知的毕达格斯定理和直角三角形的角与边的关系。

类似地，双曲几何中的圆周长及圆面积公式的极限就是欧氏几何中相应的公式。

上述讨论中，R被称为相应双曲度量的曲率半径，而$1/R$被称为曲率，更确切地说是曲率的绝对值（因为双曲度量的曲率是负的）。

在这样看法下，欧氏度量的曲率半径为∞，曲率为0。

还有一种非欧几何，叫椭圆几何，其曲率是正的常数。它相当于一个球面的几何，那里的直线是球面上的大圆。在这种非欧几何中三角形内角和大于π。和双曲几何一样，当曲率半径趋于无穷时，其极限也就是欧氏几何。

§19 关于非欧几何的真理性问题

通常人们总喜欢问这样的问题，欧氏几何与非欧几何究竟谁是谁非、谁对谁错？

这个问题实际上是两个不同意义下的问题：一个是从逻辑学的角度，问对与错，另一个是从哲学的意义上问，我们现实空间是欧氏的还是非欧的？

对于第一种意义下的提问，比较容易回答，两者皆对。也就是说，无论是欧氏几何，还是罗巴切夫斯基几何，从逻辑上都没有错误。那为什么结论不同呢？道理很简单，前提不同，也即依据的公理系统不同，自然结论也就不同。这里逻辑只管推理的步骤是否正确，而不管前提。

在罗巴切夫斯基几何问世后不久，人们提出了这样的逻辑

学问题：在迄今为止的罗巴切夫斯基几何命题中，我们没有发现彼此矛盾的命题，谁能保证一万年之后不会有什么人在此基础上推出一个命题跟已知的命题相矛盾呢？换句话说，罗巴切夫斯基公理系统本身是否是无矛盾的？

这确实是极重要的问题。在这个问题上，克莱茵的模型或庞卡莱模型帮了大忙。

以庞卡莱模型为例，回顾我们所做过的事情，我们在欧氏空间中建立了罗巴切夫斯基几何的一个模型，而我们的全部推理是依照欧氏几何进行的。每一条结论既可解释为非欧几何的命题，又可解释为欧氏几何中的一个命题。例如，非欧几何中三角形内角和小于π，在庞卡莱模型中就是下面的欧氏几何的命题：垂直于单位圆周的三条相交的圆弧，所围的圆弧三角形的三个内角和小于π，这样，假如罗巴切夫斯基几何有一条命题跟其它命题矛盾，那么在欧氏几何中必然也有一条命题跟其它命题矛盾。克莱茵模型与庞卡莱模型告诉了人们：罗巴切夫斯基公理系统的无矛盾性取决于欧几里德公理系统的无矛盾性。

本来，对于欧几里德公理系统也应该问其有无矛盾的问题。但他的系统所陈述的事情是如此自然以致人们没有提出这样的问题。而罗巴切夫斯基几何所得到结论是如此出于人们之意外，于是人们自然怀疑甚多。对于“嫌疑犯”提出各种质问是必然的。克莱茵的模型与庞卡莱的模型使这个“嫌疑犯”得到解脱。

罗巴切夫斯基几何的出现大大促进了数学公理系统的研究及几何基础的研究。在这方面希尔伯特(Helbert, 1862—1943)及其它一些数学家，大约在上世纪末及本世纪初曾经做了许多工作，去完善欧几里德的公理系统，并证明其无矛盾性（或称为相容性）。从而罗氏公理系统也是无矛盾的。

这样，欧氏几何与罗氏几何在逻辑上都是正确的。

现在我们讨论第二个问题，即我们所赖以生存的现实空间到底是欧氏的还是非欧的？

在回答这个问题之前首先应当弄明白，这个问题是实践上的问题，而不是一个思辨的问题。既然如此，我们就必须明确什么是我们所讨论的几何对象的物理模型。比如什么是实际上的直线？根据通常的习惯，大家约定光线在真空里或均匀介质中走的是直线。这样一来，为了说明现实空间是欧氏的还是非欧的，就应当去实际测量三个光源所构成光线三角形的内角和，看看它到底是小于π还是等于π。

遗憾的是，无论是把光源设在三座山的山顶上，还是天文上对恒星的观测，都使我们在目前的技术条件下作不出任何结论。事实上，任何观察都有一定的误差，迄今为止所作的观测都表明三角形内角和与π相差甚少，而这个差已小于我们观测上的误差，使得我们无法断定，这个差是观测误差造成的还是空间的非欧性造成的（上节的讨论告诉我们，当曲率半径很大时，三角形的角欠会很小）。因此，我们对此不能作出任何肯定性的结论。

如果观测的办法不能回答空间属于哪类几何的问题，那么借助于物理学的研究成果来探索这一问题或许是应该的。1905年著名的物理学家爱因斯坦(Einstein, 1879—1955)建立了相对论。按照这种理论，时间与空间有不可分割的关系。离开空间的绝对时间是不存在的。同样，离开时间的绝对空间也是不存在的。1915年爱因斯坦又进一步提出了广义相对论。在广义相对论中，他放弃了关于时空的均匀性假定，而认为时空是由不均匀的物质分布与运动所构成。宇宙空间的几何性质和充满天际的相互吸引的物质分布与运动发生着密切的联系。总之，按照广义相对论的观点，这个空间的几何学绝对不是欧氏几何，

似乎也不是罗氏几何，而是比它们更为复杂的几何。由于空间物质的分布的不均匀性，使得这种几何的曲率半径在空间中的不同点取不同值。

尽管按照广义相对论的观点，宇宙的时空结构是极其复杂的，而且即使在狭义相对论里，空间也不能从时间中分离出来，然而在一定的条件下或是一定的假定下，比如在一个与宇宙尺度相比是微小的区域里或者是运动速度比光速要小得多的情况下，我们仍然可像通常一样把空间与时间分开考虑，并且可以把曲率半径在局部范围内假定为常数。这样，空间的几何性质就表现非欧几何的性质。又由于我们所考虑的范围过小，相对说来曲率半径很大。这时，欧氏几何与非欧几何相差甚微。因此，再作一次近似，空间的几何性质就是欧氏的。总之，按照广义相对论的观点，整个宇宙的几何性质是极为复杂的，从整体上看它既不是欧氏的，也不是非欧的。但是，从局部上看，空间的几何性质则近似于非欧几何、甚至欧氏几何。

这里有个尺度问题。人类的实际活动范围虽然正在扩大，但与宇宙的尺度相比，这仍然是一个极小的局部。比如，地球的半径不超过7×10^{-10}光年，而现在能观测到的星云却有五亿光年！所以欧氏几何在我们的日常经验中显示了无可怀疑的正确性。但是，今后随着人类活动范围的逐步扩大，空间的几何性质与欧氏几何的差异就会慢慢显露出来，或许那时不得不改用非欧几何来描述空间性质。这当然只是一个设想，将来究竟如何还要拭目以待。

章末有些习题，说明曲率半径相对较大时，欧氏几何与非欧几何的差别就微乎其微。在这个意义上，欧氏几何是非欧几何的近似与简化，只要所考虑的图形的尺度相对于曲率半径说来很小，这种近似与简化就是可以被接受的。

非欧几何的产生使人类挣脱了欧氏几何的束缚，改变了人们对宇宙的认识。

习　　题

1. 罗巴切夫斯基几何的庞卡莱模型不仅可以建立在单位圆内，而且也可以建立在上半平面内。令

$$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}z>0\}$$

是上半平面，它的边界是实轴$\mathbb{R}$。任何一条与实轴正交的在上半平面内的直线弧与半圆弧都被称为非欧直线。请仿照单位圆情况的办法定义上半平面内的两点的非欧距离并证明其非欧度量是

$$\frac{1}{\mathrm{Im}z}|\Delta z|。$$

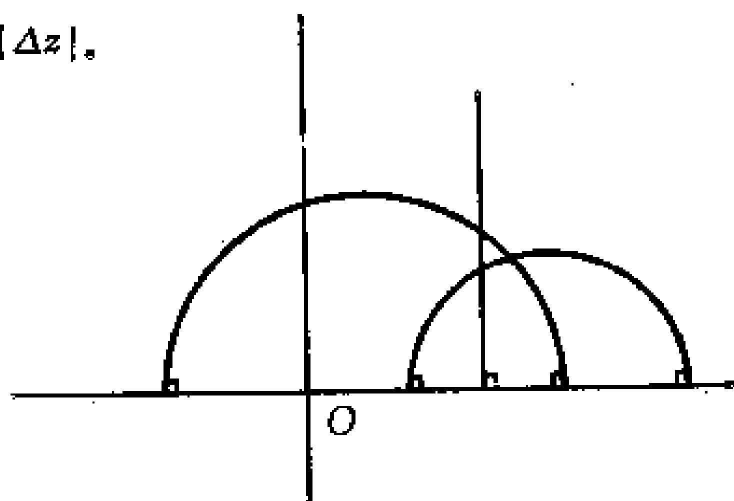


图2—19.1

2. 利用上述模型证明非欧三角形的内角和小于π。

3. 证明每个分式线性变换

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ad-bc=1)$$

都是上述模型中的一个非欧运动。

4. 讨论上述模型中非欧圆、极限圆、超圆等概念，试问区域

$$\{z\in\mathbb{H}:\ \mathrm{Im}z>c\}\quad(c>0)$$

是否是极限圆？又问区域

$$\left\{z \in \mathbf{H}: \quad \left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < a\right\} \quad (a > 0)$$

是否是超圆？

5. 画出保持上半平面不变的椭圆型、双曲型及抛物型分式线性变换的不变圆周、极限圆周或超圆周。你能在图2—19.2至2—19.4中挑出适当的图来分别解释这三种不同的非欧运动吗？

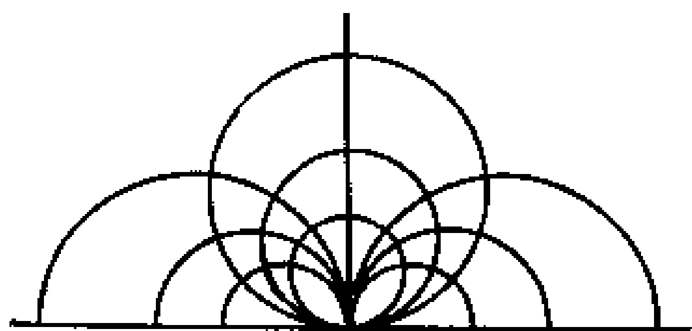


图2—19.2

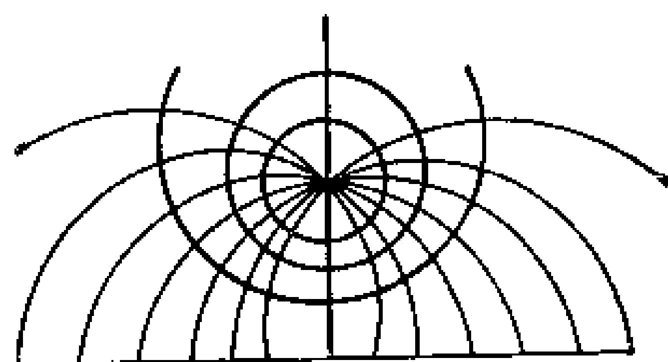


图2—19.3

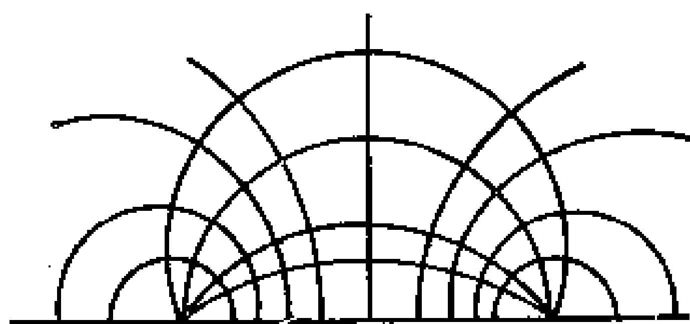


图2—19.4

6. 现在回到单位圆的模型上。用$d(z_1, z_2)$表示单位圆内任意两点的非欧距离。试证明三角不等式

$$d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

7. 设z_1与z_2是单位圆内任意两点。设γ是连结z_1与z_2的任意一条曲线。试证γ的非欧长度$\geqslant d(z_1, z_2)$。这表明非欧直线段是最短连线。因此，非欧直线又叫非欧度量下的测地线。(这里所谓γ的非欧长度是指在γ上任取n个点然后用非欧线段连结所组成的一条折线的非欧长度之极限，当n无限增大并使得分点越来越密时。)

8. 证明过非欧圆心的任何一条非欧直线与该非欧圆周正交。反之，若一条非欧直线与一非欧圆周正交，则该非欧直线一定通过非欧圆之圆心。由此推出：椭圆型非欧运动的不变非欧圆周之圆心是变换的不动点。

9. 证明只有当$n \geqslant 5$时才存在非欧n边凸多边形，其每个内角均为直角。

10. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为任意给定的$n$个实数，$n>3$，且

$$0<\alpha_j<\pi, \quad j=1, 2, \cdots, n;$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<(n-2)\pi.$$

证明存在一个非欧n边形，使其内角依次为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

提示：考虑如图2—19.5所示的四边形。(这种四边形的存在性没有问题，因为它是一个直角三角形关于斜边的反演。)在这个四边形中边长d(非欧)是变动的，它与θ_j有如下关系：

$$\sin\frac{\theta_j}{2}=\frac{\cos\alpha_j/2}{\operatorname{ch} d}, \quad j=1, 2, \cdots, n.$$

证明可以适当的选取d使得$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$恰好等于$2\pi$。这时我们就可以$n$个这样的四边形拼成一个$n$边形，并使其内角依次是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

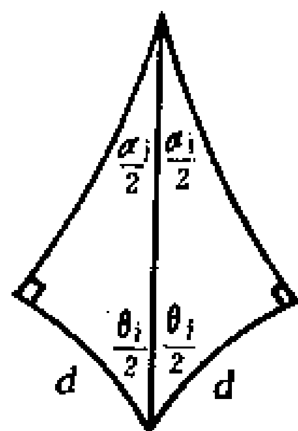


图2—19.5

11. 由上题推出，$n \geqslant 5$时每个内角都是直角的n边非欧多边形总是存在的。

12. 设a与b分别是海雅姆-萨开里四边形的下底与上底的非欧长度，c是其腰的非欧长度，φ是其底角，h是两底公垂线的非欧长度。试证明下列关系式：

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}h=\cos\varphi,$$

$$\operatorname{ch}h=\operatorname{ch}c\sin\varphi.$$

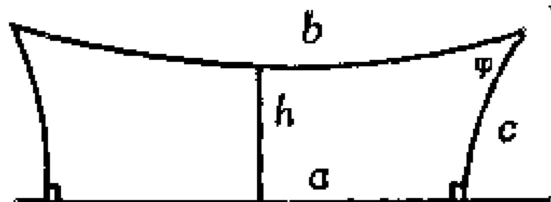


图2—19.6

13. 在图2—19.7中S表示太阳，T_1与T_2分别表示地球的两个位置。设A是一个被观测的恒星，假定角T_1T_2A是直角而角T_2T_1A为α。

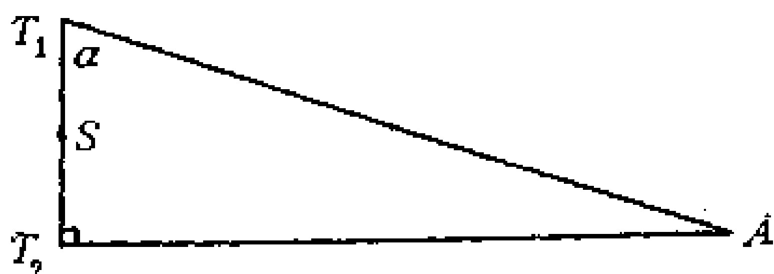


图2—19.7

根据天文观测$\alpha=\pi/2-24\times10^{-8}$（弧度）。而地球绕太阳旋转轨道的直径为$316\times10^{-7}$光年。假若宇宙是非欧的，并且曲率半径为$R$。试问$R$大于多少光年时才不致与上述观察相矛盾。

提示：设ω是T_1处关于直线T_2A的平行角，那么

$$\omega>\alpha \text{ 或 } \frac{\pi}{2}-\omega<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

由此推出

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$=24\times10^{-8}$$

但是，另一方面我们有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\cos\omega=\operatorname{th}\frac{d}{R}\approx d/R.$$

这样有不等式$d/R<24\times10^{-8}$。

14. 假定在日常生活中我们所实际接触的三角形的三边长度均不超过1公里，并假定空间是非欧的，其曲率半径$R=6400$公里（相当于地球之半径）。证明我们实际接触的三角形的角欠不超过9×10^{-8}（弧度）。

注：曲率半径$R=6400$公里纯属假设。目的是要告诉我们，只要曲率半径相对很大，则角欠就是一个不易觉察的量，这时欧氏几何与非欧几何就相差甚微。

第三章　双曲几何与函数论

双曲几何在许多方面有重要的应用。本章只就它在函数论方面的应用作点介绍。即使限于复变函数论的范围，这里的介绍也是很不全面的，许多更重要的应用无法在这里涉及。这一章中我们要求读者熟悉复变函数的基本理论。

双曲几何之所以能应用于复变函数论，其原因在于一个解析函数作为复平面上两个区域间的映射，它总是使得区域上的双曲非欧度量不增大。这就是所谓广义许瓦兹引理。在这一看法下，通常大家熟知的代数基本定理与柳维尔定理是一个简单推论。本章中我们利用广义许瓦兹引理给出了毕卡定理的证明。此外，我们还将用它讨论正规族理论，并应用于现代复解析动力系统。

§1　许瓦兹-皮克定理

我们知道，在解析函数论中下面的命题通常被称为许瓦兹引理①：

① 许瓦兹(Schwarz，1843—1921)。

设$f(z)$是单位圆D上的解析函数，且$|f(z)|<1$ ($\forall z\in D$)，$f(0)=0$，则$|f(z)|\leqslant|z|$且$|f'(0)|\leqslant 1$，两式中的等号当且仅当$f=e^{i\theta}z(\theta\in \mathbf{R})$时成立。

这个命题虽被称为引理，但实际上是复变函数论中一个相当重要的定理，尤其在几何函数论中它是十分基本的。

1916年皮克(Pick, G)将许瓦兹引理推广成下列形式（下式的证明在一般解析函数论的书中均可找到）：

$$\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)|}\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2|}, \tag{1.1}$$

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}. \tag{1.2}$$

现将这一结果用非欧度量加以解释。首先，(1.1)告诉我们：

一个从单位圆到自身的解析变换使得单位圆内的任意两点的非欧距离不变大。

根据许瓦兹引理等号成立的条件可以推出，公式(1.1)中等号对于两个不同点z_1与z_2成立的充要条件是f是保圆的分式线性变换。所以，我们又可以将上述结论中“任意两点非欧距离不变大”改为变小，只要f不是分式线性变换。也就是说，我们有

一个从单位圆到自身的解析变换，只要它不是分式线性变换，那么它一定使得单位圆内任意两点的非欧距离严格变小。

这样一来曲线的非欧长度以及区域的非欧面积，在单位圆到自身的解析变换下都要严格变小，只要变换不是分式线性变换。

皮克的这一观察是富有启发意义的。首先，它告诉人们，变换的解析性与双曲度量有内在的深刻的联系，这促使我们利用这种联系来解决函数论的问题。其次，它还告诉人们，单位

圆到自身的解析变换中只有分式线性变换居于特殊地位，它保持非欧距离不变，而其它变换都使非欧距离变小。

我们将单位圆内的非欧度量写成微分形式

$$ds=\frac{2}{1-|z|^2}|dz|.$$

那么经过一个解析变换$f:D\to D$，这个度量变成

$$ds'=\frac{2}{1-|w|^2}|dw|$$

$$=\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}|dz|$$

(1.2)告诉我们，$ds'\leqslant ds$，也即单位圆内的非欧度量在f的变换下不增。这就是(1.2)的几何解释。

§2　一般区域上的非欧度量与广义许瓦兹引理

现在我们把许瓦兹-皮克定理推广到更为一般的区域上。这首先须要推广非欧度量的概念。

设D是单位圆，G是$\hat{\mathbb{C}}$中的另一个区域。又设$g:G\to D$是G到D的共形映射（即1-1的映满的解析映射）。我们定义G内的度量

$$ds=\frac{2|g'(z)|}{1-|g(z)|^2}|dz| \qquad (2.1)$$

为G的非欧度量，或称为双曲度量。有些书中称之为庞卡莱度量。区域G中的任意两点z_1与z_2的非欧距离被定义为$g(z_1)$与$g(z_2)$在D中的非欧距离。

大家知道，G到D的共形映射不是唯一的。我们应当说明上述定义的非欧度量或非欧距离与共形映射g的选择无关。事实上，若另有一个共形映射$g_1: G\to D$，那么显然$g_1\circ g^{-1}: D\to D$是共形映射，从而是保圆的分式线性变换，也即 $g_1=\varphi\circ g$，其中φ是保圆的分式线性变换。这样一来，g_1与g只差一个保圆的分式线性变换。因此，按照g与按照g_1定义G的非欧度量与非欧距离是完全一样的。

例1 上半平面$\boldsymbol{H}$上的非欧度量。

取$\boldsymbol{H}$到单位圆D的分式线性变换$g=(z-i)/(z+i)$，即得到$\boldsymbol{H}$的非欧度量为

$$ds=\frac{4|dz|}{|z+i|^2-|z-i|^2}=\frac{|dz|}{y} \tag{2.2}$$

其中$y=\operatorname{Im}z$。

一般说来，在一个区域内的度量

$$ds=\rho(z)|dz|,\quad \rho(z)>0,$$

其曲率定义为

$$K=-\rho^{-2}\Delta\log\rho. \tag{2.3}$$

其中Δ表示对于x，y的拉普拉斯算子(这里我们把$\rho(z)$看成是z的实部x及虚部y的函数)。

我们可以不去理会曲率概念的几何意义，只当它是一个词用。不难直接验算，单位圆内的非欧度量的曲率为-1。

另外，又不难证明，共形映射将保持曲率不变。因此，前面我们所定义的区域G上的非欧度量的曲率为-1。

例2 $D_R=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<R\}$上的非欧度量。

取$D_R\to D$的共形映射$g=z/R$。这时有

$$ds=\frac{2/R}{1-\frac{|z|^2}{R^2}}|dz|=\frac{2R}{R^2-|z|^2}|dz| \tag{2.4}$$

我们曾在上一章中讨论过D_R的非欧度量，根据当时定义，D_R的非欧度量应当为

$$\widetilde{ds}=\frac{2R^2}{R^2-|z|^2}|dz|. \qquad (2.5)$$

这是怎么回事呢？不难根据公式(2.3)计算得到，度量(2.4)的曲率为-1，而度量(2.5)的曲率为$-1/R^2$。在上一章中我们讨论D_R的非欧度量的目的是为了让曲率趋于零时（即曲率半径趋于无穷时）非欧几何的极限状态，因此我们需要那样定义。现在我们的目的不同了。我们希望一切区域的非欧度量都是单位圆直接诱导的，以便于我们有可能将单位圆上的结果推广到一般区域上。这样，我们在D_R内有了现在的度量(2.4)。今后我们不再使用度量(2.5)。凡说到D_R 的非欧度量，均指根据本节定义计算出的度量(2.4)。

例3 $D_R^*=\{z\in\hat{\mathbf{C}}:\ |z|>R\}$的非欧度量为

$$ds=\frac{2R}{|z|^2-R^2}|dz|. \qquad (2.6)$$

上一节中的许瓦兹-皮克定理可推广成下列形式：

定理2.1（广义许瓦兹引理） 设有区域G_1与G_2，它们各有非欧度量

$$ds_1=\rho_1(z)|dz|\text{与}ds_2=\rho_2(w)|dw|.$$

又设$w=f(z)$是$G_1\to G_2$的解析函数($f(G_1)\subset G_2$)。则

$$\rho_2(f(z))|f'(z)|\leqslant\rho_1(z), \qquad (2.7)$$

也即在变换f下非欧度量不会增大：

$$\rho_2(w)|dw|\leqslant\rho_1(z)|dz|,\quad w=f(z).$$

等号当且仅当f是G_1到G_2上的共形映射时成立。

证 设g_j: $G_j\to D$是区域G_j到单位圆D上的共形映射，$f=$

1，2。则复合函数$F=g_2\circ f\circ g_1^{-1}$：$D\to D$是$D$到$D$内的解析变换。由§1中皮克的公式(1.2)得到

$$\frac{|F'(\zeta)|}{1-|F(\zeta)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|\zeta|^2},\ \zeta\in D.$$

令$z=g_1^{-1}(\zeta)$，上式可改为

$$\frac{|g_2'(f(z))f'(z)|}{1-|g_2(f(z))|^2}\leqslant\frac{|g_1'(z)|}{1-|g_1(z)|^2},\ z\in G_1.$$

这恰好就是

$$\rho_2(f(z))|f'(z)|\leqslant\rho_1(z),\ z\in G_1.$$

这就证明了(2.7)。显然，等号成立当且仅当F是分式线性变换。这时$f=g_2^{-1}\circ F\circ g_1$是$G_1$到$G_2$上的共形映射。证毕。

推论 若$G_1\subset G_2$，则G_2的非欧度量不超过G_1的非欧度量：$\rho_2(z)\leqslant\rho_1(z)$，$\forall z\in G_1$。等号当且仅当$G_1=G_2$时成立。

这个推论告诉我们，区域变大其非欧度量变小。

推论的证明是容易的，只要将上述定理中f取为$f(z)=z$即可。

为了说明这一定理的用途，我们用它来证明一些大家已熟知的定理：

刘维尔定理 设$w=f(z)$是一个全平面上的解析函数，且$|f(z)|<M$ $(\forall z\in\mathbb{C})$。则f是一个常数。

证 我们考虑$D_R=\{z:\ |z|<R\}$及$D_M=\{w:\ |w|<M\}$。那么对于任意$R>0$，$f|_{D_R}$是$D_R\to D_M$的解析函数。由定理2.1有

$$\frac{M|f'(z)|}{M^2-|f(z)|^2}\leqslant\frac{R}{R^2-|z|^2}$$

其中$z\in D_R$是任意固定的一点。令$R\to\infty$，则有$f'(z)=0$。于是

f是一常数。证毕。

代数基本定理 设 $P_n(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$是一个多项式，$a_0\neq 0$，$n\geqslant 1$。则$P_n(z)$在$\mathbb{C}$中至少有一个根。

证 用反证法。假定$P_n(z)$在$\mathbb{C}$上没有根。由于当z趋于无穷时$|P_n(z)|$也趋于无穷，故由连续函数的最小值定理可知，$|P_n(z)|$在$\mathbb{C}$有正的下界，也即

$$|P_n(z)|>r>0,\quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

考虑D_R及$D_r^*=\{w:\ |w|>r\}$则应用定理2.1有

$$\frac{r|P_n'(z)|}{|P_n(z)|^2-r^2}\leqslant\frac{R}{R^2-|z|^2}$$

其中$z\in D_R$是任意固定的一点。令$R\to\infty$，即得$P_n'(z)=0$。但此为不可能，证毕。

从这两个定理的证明中可以看出解析函数不可能把复平面装入一个有非欧度量的区域，除非它是一个常数。

从许瓦兹引理到广义许瓦兹引理，所有的证明都是十分简短的。但观点改变了，因而有更广泛的应用。

在上面定义非欧度量时，我们要求区域G要能共形映射到单位圆D。因此，按照这样的定义，区域G至少应当是单连通的，并且边界点多于两点。怎样在更为一般的区域上定义非欧度量呢？我们采用下面的方式：

设区域$G\subset\hat{\mathbb{C}}$，有一个φ：$D\to G$是D内的解析函数，$\varphi'(\zeta)\neq 0(\forall\zeta\in D)$，且$\varphi$是一个满射，也即$\varphi(D)=G$。我们定义$G$上的非欧度量是

$$ds=\rho(z)|dz|=\frac{2|d\zeta|}{1-|\zeta|^2},\quad z=\varphi(\zeta).$$

也就是说，G中点z处的非欧度量就等于点ζ处在D中的非欧度

量，如果$\varphi(\zeta)=z$。

要说明这个定义的合理性，必须首先说明两条：一是G的非欧度量不依赖于φ的选取，二是非欧度量在一点z处的值不依赖于ζ的选取（因为在现在的情况下，有可能多个ζ对应于同一点z．这要用到单值性定理．我们不想离题太远，故现在省去这一说明。

很明显，在上述定义中我们可以将单位圆换成一般单连通域，只要它有非欧度量．设P是一个单连通域，有非欧度量$ds=\tilde{\rho}(\zeta)|d\zeta|$．又设存在一个解析函数$\varphi$：$P\to G$，$\varphi'(\zeta)\neq 0$，$\varphi(P)=G$。则$G$中的非欧度量

$$ds=\rho(z)|dz|=\tilde{\rho}(\zeta)|d\zeta|$$

$$(z=\varphi(\zeta))。$$

例4 穿孔盘$B=\{z：0<|z|<1\}$的非欧度量。

考虑半平面$\mathbf{H}=\{\zeta：\text{Im}\zeta>0\}$及函数$\varphi(\zeta)=e^{i\zeta}$。很容易看出，$\varphi$将$\mathbf{H}$映为$B$，$\varphi'(\zeta)\neq 0$。这样，$B$的非欧度量为

$$ds=\rho(z)|dz|=\frac{|d\zeta|}{\text{Im}\zeta}=\frac{-|dz|}{|z|\text{Im}(i\log z)}$$

$$=\frac{-|dz|}{|z|\log|z|}.$$

显然，穿孔盘$B_r=\{z：0<|z|<r\}$的非欧度量为

$$ds=\frac{|dz|}{|z|\log\left(\frac{r}{|z|}\right)}.$$

在扩充了非欧度量于多连通域之后，定理2.1及其推论仍然成立。这个证明仍然要用到单值性定理。

熟悉拓扑语言的读者会看出，在定义多连通域的非欧度量时，我们实际上是考虑了这个多连通域上的万有覆盖并要求这

个万有覆盖具有非欧度量。多连通域上的非欧度量就是经过覆盖的投影φ从万有覆盖上的非欧度量诱导的。这里希望读者注意，投影φ是全纯的，这一点比一般拓扑中所讲的投影更强了。

现在我们要问，经过这样扩充之后是否平面上所有的区域都有非欧度量呢？如果不是，那么到底怎样的区域才有非欧度量呢？

显然，$\mathbf{C}$平面本身不可能有非欧度量。因为假如$\mathbf{C}$有非欧度量$ds=\rho(z)|dz|$，则由定理2.1的推论可知，这个非欧度量一定小于$D_R=\{z; |z|<R\}$上的非欧度量：

$$\rho(z)|dz|<\frac{2R}{R^2-|z|^2}|dz|$$

其中$z\in D_R$是任意固定的一点。令$R\to\infty$就推出$\rho(z)=0$，这与非欧度量的定义不符。

利用同样的办法并注意到例4中所讲的B_r的非欧度量，可以推出穿孔平面$\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\setminus\{0\}$上也不可能有非欧度量。

更一般地说，扩充复平面（复球面）$\hat{\mathbf{C}}$上挖去一个点或两个点所得到的区域上不可能定义非欧度量。

当然，在$\hat{\mathbf{C}}$本身上也不可能定义非欧度量（与穿孔盘比较即证得）。

有趣的是，除了上述几种情况之外，其它任何区域都有非欧度量。

定理2.2 设G是$\hat{\mathbf{C}}$中的一个区域，集合$\hat{\mathbf{C}}-G$多于两点，则G上有非欧度量。

定理的证明依赖于黎曼曲面论中的单值化定理。

在下节中，我们将直接构造$\hat{\mathbf{C}}$平面上挖去三点的区域上的非欧度量。

§3 关于模函数与$\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$上的非欧度量

不失一般性，我们考虑$\hat{\mathbf{C}}$上挖去的三点是0，1，∞，记$\hat{\mathbf{C}}-\{0,1,\infty\}$为$\mathbf{C}_{0,1}$。现在研究$\mathbf{C}_{0,1}$上的非欧度量。

考虑上半平面$\mathbf{H}$及其中的区域

$$A=\left\{\zeta=\xi+i\eta;\ 0<\xi<1,\ \eta>0,\ \left|\zeta-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\right\}$$

设$z=\varphi(\zeta)$是把A映射为$\mathbf{H}=\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$的共形映射，且把0，1，∞分别对应于0，1，∞。由于A的边界是由两条半直线及一条半圆弧组成，而A在φ下的像为上半平面，故φ可以沿着A的直线弧或圆弧边界作对称延拓。第一次延拓后的边界仍是直线弧与圆弧组成，而值域为下半平面。这样我们又可在此基础上作第二次延拓。这样一直作下去，最后$z=\varphi(\zeta)$被解析延拓到整个上半平面。这个延拓过程中，z平面上的点0，1，∞始终没有

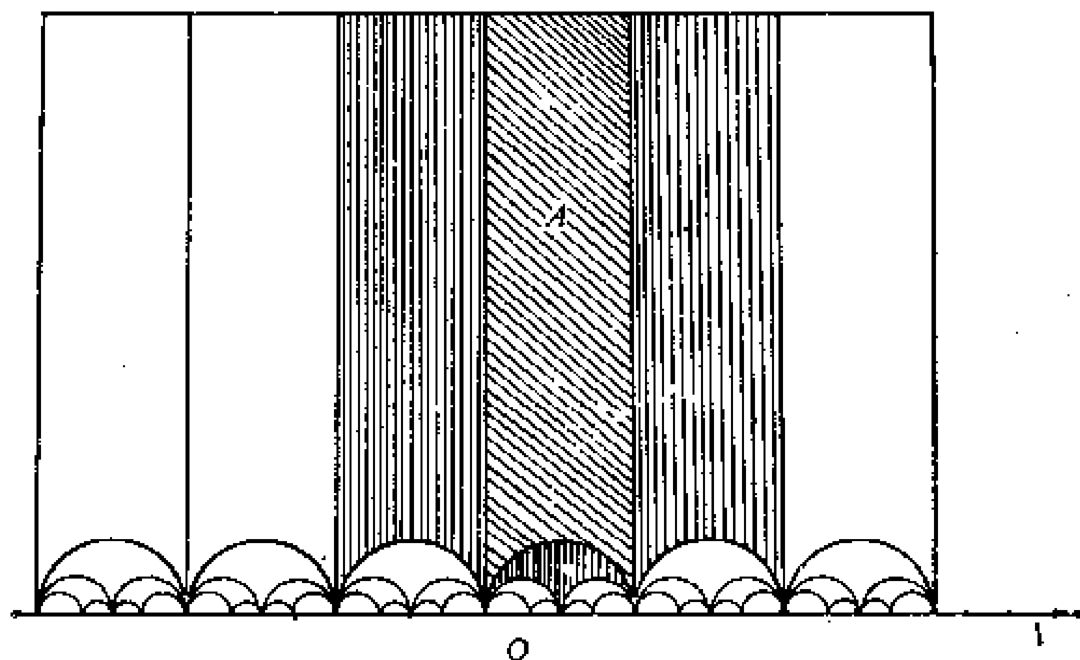


图3—3.1

被取到，而其它任意一点被取了无穷多次。

在图3—3.1中画出了φ的解析延拓过程，其中有竖线的三个区域是A第一次延拓的结果。

φ的定义域也可换成单位圆，其中A应换成单位圆内的一个退化非欧三角形。图3—3.2中有斜线的三角形对应于下半平面，而白三角形对应于上半平面。

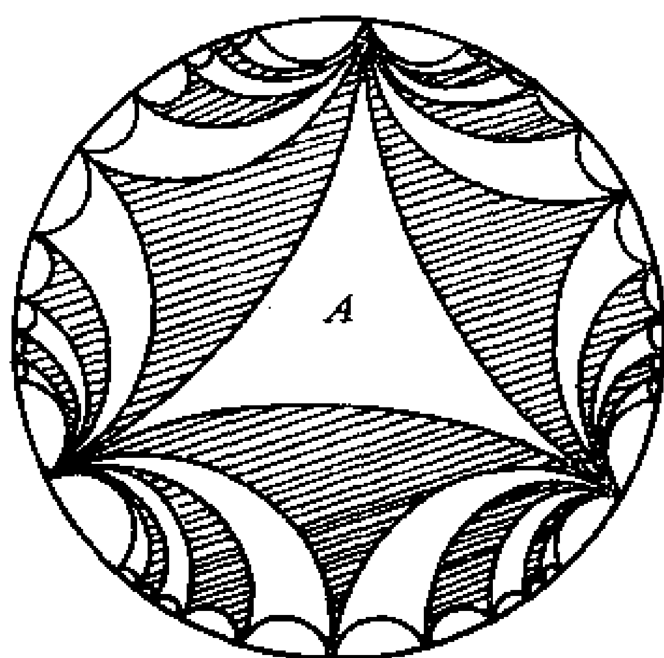


图3—3.2

由上面解析延拓而得到的函数φ被称为模函数。它的这个名字的得来是由于它与椭圆函数的模有密切关联。

模函数可以通过一种叫作维尔斯特拉斯$\mathscr{P}$函数的函数表出。但表达式很复杂，用处不大。

根据上面的讨论，模函数φ既可定义在上半平面$\mathbb{H}$上又可定义在单位圆D上。为了确定起见，现在我们约定它定义在$\mathbb{H}$上。这样，φ是$\mathbb{H}\to\mathbf{C}_{0,1}$的一个解析映射，且有$\varphi'(\zeta)\neq 0$ $(\forall\zeta\in\mathbb{H})$，$\varphi(\mathbb{H})=\mathbf{C}_{0,1}$。于是$\varphi$可以用来定义$\mathbf{C}_{0,1}$上的非欧度量。设$\mathbf{C}_{0,1}$上的非欧度量为$ds=\lambda(z)|dz|$，则

$$\lambda(z)=\frac{|\psi'(z)|}{\mathrm{I_m}\psi(z)}$$

其中$\psi(z)$是$\varphi(\zeta)$的反函数。

一般说来，ψ是一个多值函数。但是，当我们限定它的取值范围是图3—3.1中任意一个非欧三角形时，它是一个单值函数。$\lambda(z)$的值与ψ的单值分支的选择无关。

总之，我们通过模函数得到了$\mathbf{C}_{0,1}$的非欧度量$\lambda(z)|dz|$。

作为这些讨论的一个直接应用是证明毕卡小定理：

毕卡小定理 设$w=f(z)$是$\mathbf{C}$上的解析函数。若$w=f(z)$不取复数a与b $(a\neq b)$，则f一定是常数。

证 不失一般性，我们可以假定$a=0$，$b=1$。因为如其不然则考虑函数

$$F(z)=\frac{f(z)-a}{b-a}$$

即可。

设$D_R=\{z:\ |z|<R\}$，则$f(D_R)\subset\mathbf{C}_{0,1}$。于是由广义许瓦兹引理有

$$\lambda(f(z))|f'(z)|\leqslant\frac{2R}{R^2-|z|^2},$$

对于任意的$z\in D_R$。任意固定z并令$R\to\infty$，则得$f'(z)=0$。证毕。

§4 正规族理论与蒙德尔定理

正规族理论是毕卡定理的一个直接发展，它在复变函数中的应用是广泛的，而它的基础仍然是广义许瓦兹引理。

设G是$\mathbf{C}$中的一个区域。考虑G上的解析函数族

$$\mathscr{F}=\{f_\alpha:\ f_\alpha\text{在}G\text{中解析}\}_{\alpha\in A}.$$

我们称$\mathscr{F}$在G上是正规族，如果$\mathscr{F}$的任意一个序列都有一个子序列在G中内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷。

这里所谓内闭一致收敛是指在G中的任意一个闭集上一致收敛。以类似的意义理解下面所说的内闭一致有界等提法。下面所说的内闭等度连续是指：对于任意给的闭集$K\subset G$及任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得对于一切α有

$$|f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)|<\varepsilon,\text{只要}z_1,\ z_2\in K,\ |z_1-z_2|<\delta.$$

阿尔切拉（Arzela）定理断言：任意给定的一个函数族，只要内闭一致有界与内闭等度连续，则其任意一个序列有内闭一致收敛的子序列。

现在我们讨论的是解析函数族。对于这样的函数族而言，内闭一致有界蕴含着内闭等度连续。事实上，由解析函数的哥西（Cauchy）公式可知：内闭一致有界蕴含着导函数族内闭一致有界，而后者意味着原来的函数族内闭等度连续。因此，我们有下面的定理，通常称为

凝聚原理 若G上的解析函数族$\mathscr{F}=\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$在$G$中内闭一致有界，则$\mathscr{F}$是一个正规族。

蒙德尔对于这一原理作了重要推广：

蒙德尔定理 若G上的解析函数族$\mathscr{F}=\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$中每一个函数$f_\alpha$都以复数$a$与$b(a\neq b)$为其例外值，则$\mathscr{F}$是一个正规族。

证 不失一般性，假定$a=0$，$b=1$。像前面一样，记$\lambda(z)\cdot|dz|$是$\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$的非欧度量。设$\{f_n\}$是$\mathscr{F}$的任意一个序列。若$\{f_n\}$中有一个子序列在$G$中内闭一致趋于$\infty$，则$\{f_n\}$已符合要

求。若$\{f_n\}$中没有这样的子序列，则下面证明它一定有一个内闭一致收敛的子序列。

设$\{f_n\}$中没有内闭一致趋于无穷的子序列。这时则一定存在一点$z_0\in G$及一个子序列$\{f_{n_k}\}$，使得该子序列在z_0点的值有界。不失一般性，我们假定$\{f_n\}$本身有这样的性质，也即

$$|f_n(z_0)|\leqslant C,n=1,2,\cdots, \tag{4.1}$$

其中C是常数。不妨设$C>1$。

在z_0附近考虑圆$B_0=\{z:\ |z-z_0|<r_0\}$，$B_0\subset G$。在B_0上应用毕卡-舒特基定理则有

$$\log|f_n(z)|\leqslant\{M+\log^+|f_n(z_0)|\}\frac{r_0^2+|z-z_0|^2}{r_0^2-|z-z_0|^2}$$

$$\forall z\in B_0,\ n=1,2,\cdots,$$

其中M是与f_n无关的常数。由（4.1）有

$$\log|f_n(z)|\leqslant\{M+\log C\}\frac{r_0^2+|z-z_0|^2}{r_0^2-|z-z_0|^2} \tag{4.2}$$

$$\forall z\in B_0,\ n=1,2,\cdots.$$

此式告诉我们序列$\{f_n\}$在$B_0'=\{z:\ |z-z_0|<r_0/2\}$一致有界。

然后，我们再在B_0'中任意选取一点z_1，并考虑圆$B_1=\{z:\ |z-z_1|<r_1\}$，$B_1\subset G$。在B_1上应用毕卡-舒特基定理又可以证明$\{f_n\}$在$B_1'=\{z:\ |z-z_1|<r_1/2\}$上一致有界。

如此下去，我们便得到$\{f_n\}$在G中内闭一致有界。这就证明了$\{f_n\}$中有一个内闭一致收敛的子序列。证毕。

正规族概念也可以推广到亚纯函数族，这时收敛的概念是用球面度量描述的。蒙德尔定理对亚纯函数族而言同样适用，不过例外值应改为3个。现叙述如下：

区域$G\subset\hat{\mathbf{C}}$上的亚纯函数族$\mathscr{F}=\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$是正规族，如果其

中每一个函数f_α都以a，b，c为例外值。这里a，b，c为$\hat{\mathbf{C}}$中三个不同的值。

§5 在复解析动力系统中的若干应用

正规族理论及蒙德尔定理在现代复解析动力系统理论中是一块重要的基石，法都集与如利亚集这两个基本研究对象就是依据迭代序列的正规性来定义的。

我们不打算介绍复解析动力系统的整个理论的全貌，而只想讲其中若干结果，以显示非欧度量及广义许瓦兹引理在此理论中的作用。

设 P是一个多项式。用牛顿法求它的根是考虑如下的迭代序列：

$$z_0=z_0,\quad z_1=z_0-\frac{P(z_0)}{P'(z_0)},\quad z_2=z_1-\frac{P(z_1)}{P'(z_1)},\quad \cdots$$

大家知道，对于大多数的初始值z_0而言，这个迭代序列z_n都收敛于P的根。但是，对于某些初值 z_0而言，这个迭代序列，不仅不趋于 P的根而且可能没有极限，甚至表现了某种不可预测性，被称之为**紊动**。

这个问题的一般提法是，考虑区域$D\subset\hat{\mathbf{C}}$上的解析自映射f：$G\to G$及迭代序列：

$$f^0(z)=z,\ f^1(z)=f(z),\ f^2(z)=f(f(z)),\ \cdots$$

我们要问当 n 充分大了之后$f^n(z)$的性态如何？它对于初值z的依赖性怎样以及是否有极限？

迭代序列$\{f^n\}$被称作区域 G上的一个**复解析动力系统**。点

z_0所形成的序列$\{f^n(z_0)\}$被称作z_0的**轨道**，记作$O^+(z_0)$。

这种复解析函数的迭代早在第一次世界大战前就被法都(Fatou)与如利亚（Julia）作过系统研究。近年来，由于电子计算机的应用，复解析函数的迭代的图形被绘制了出来，而且这些图形非常优美和复杂，引起了广泛的兴趣与注意。在80年代之后，许多数学家重新提起了法都与如利亚的工作并在此基础上作了更深入的研究。

设$f: G\to G$是一个解析自映射。我们称集合

$$F_f=\{z\in G:\ \{f^n\}在点z的一个邻域正规\}$$

为**法都集合**，称它的补集，也即$G\setminus F_f$，为**如利亚集合**，记为J_f。

例 $G=\hat{\mathbb{C}}$，$f=z^2$，则$F_f=\{z:\ |z|<1\}\cup\{z:|z|>1\}$，$J_f=\{z:|z|=1\}$。请读者自已证明。

这个例子中如利亚集合是一条规则的曲线，但大多数函数的如利亚集合并非如此。如利亚集合可能是处处不连通的完全集，可能是豪斯道夫维数大于1的曲线，甚至有可能是全平面。

初始值取在法都集合内时，轨道表现了某种稳定性，如有极限，或最终周期的（即n充分大后是周期的），最坏也有子序列内闭一致收敛。因此，法都集的每一个连通分支称为一个**稳定域**。

假如区域G是一个有界域，那么解析函数$f: G\to G$所形成的迭代序列$\{f^n\}$是一个一致有界序列。因此，由上节中所讲的凝聚原理可知，$\{f^n\}$在G内是正规族。于是，$F_f=G$，$J_f=\varnothing$。

应用蒙德尔定理又进一步推出，若$\hat{\mathbb{C}}-G$多于两点，则函数族$\{f^n\}$有三个或三个以上的例外值，从而在G内是正规族。这时f的如利亚集合也是空集。

如利亚集合是空集时表示迭代序列的行为相对较为简单，

上面的讨论表明，只有当区域G是下列三种区域之一时，其如利亚集合才可能是非空的：

$$\hat{\mathbf{C}},\ \hat{\mathbf{C}}-\{a\},\ \hat{\mathbf{C}}-\{a,\ b\}.$$

因此，目前大多数研究集中于三种典型区域上的复动力系统：$\hat{\mathbf{C}}$，$\mathbf{C}$和$\mathbf{C}-\{0\}$，尤其是前两种区域。

设z_0是一个周期点，也即存在一个正整n使得$f^n(z_0)=z_0$。(使得这个等式成立的最小正数称为z_0的周期) 若z_0的周期为n，则称数

$$\lambda=\frac{d}{dz}f^n(z)\big|_{z=z_0}$$

为周期点z_0的特征值。

若$|\lambda|>1$，则称z_0为斥性周期点。若$\lambda=0$，则称z_0为超吸性周期点。若$0<|\lambda|<1$，则称z_0为吸性周期点。若$|\lambda|=1$，则称z_0为中性周期点。

吸性或超吸性周期点均属于法都集，而斥性周期点属于如利亚集。中性周期点既可能属于法都集又可能属于如利亚集。

现在我们假定f是$\hat{\mathbf{C}}$到自身的解析映射，也即f是一个有理函数P/Q，其中P，Q是互素的多项式。设

$$d=\max\{\deg P,\ \deg Q\}>1.$$

(因为若$d=1$则f是分式线性变换，其动力系统很简单。)这时，如利亚集合J_f是非空的完全集。

根据定义，法都集F_f总是开集。

设G是F_f的一个连通分支。显然，对于任意$n>0$，都有$f^n(G)\subset F_f$。法都曾猜想区域序列

$$G,\ G_1=f(G),\ G_2=f^2(G),\ \cdots$$

是最终周期的，也即存在两个整数m及k使得

$$G_{n+k}=G_n, \quad \forall n\geqslant m.$$

换句话说，区域序列$\{G_n\}$自第m项之后是周期的。法都的这一猜想在80年初为萨里温（Sullivan）所证明，这就告诉我们，法都集的任意一个连通分支，在f^n的作用下差不多就是周期的。这对于我们研究初始值取在法都集中的轨道结构提供了一个很好的基础。

由于法都集的任意一个连通分支G都是最终周期的，故不失一般性可假定G本身就是周期的，也即存在一个正整数k，使得

$$f^k(G)=G.$$

现在我们来研究轨道$O^+(z)$（$z\in G$）的结构。

定理5.1 设G是F_f的一个连通分支，且$f^k(G)=G$。若$f^k|_G$不是$G\to G$的同胚，且f^k在G中有不动点z_0，则该不动点一定是吸性或超吸性的，并有

$$f^{kn}(z)\to z_0, \quad \forall z\in G.$$

证 因为$G\subset\hat{\mathbb{C}}-J_f$且$J_f$是一个非空完全集，故$G$有非欧度量。设$ds=\rho(z)|dz|$是$G$上的非欧度量。由广义许瓦兹引理有

$$\rho(f^k(z))|f^k(z)'|\leqslant\rho(z), \quad \forall z\in G.$$

特别地，我们有

$$\rho(z_0)\left|\frac{d}{dz}f^k(z)\right|_{z=z_0}\leqslant\rho(z_0),$$

也即

$$|\lambda|=\left|\frac{d}{dz}f^k(z)\right|_{z=z_0}\leqslant 1.$$

由于f^k不是$G\to G$的共形映射，故上述不等式只能成立不等

号。于是，z_0是吸性或超吸性周期点。

利用$|\lambda|<1$很容易看出：在z_0充分小的邻域内

$$|f^k(z)-z_0|<C|z-z_0|, \quad C<1$$

从而又有

$$|f^{kn}(z)-z_0|<C^n|z-z_0|.$$

这样，当z充分靠近z_0时，

$$f^{kn}(z)\to z_0 \tag{5.1}$$

现在说明这个极限在G内处处成立。如若不然，则存在一个$z_1\in G$及一个子序列$\{f^{kn_j}\}$使得

$$f^{kn_j}(z_1)\not\to z_0 \quad (j\to\infty) \tag{5.2}$$

由于$\{f^n\}$在G中的正规性可知，可选取$\{f^{kn_j}\}$的一个子序列，不妨设就是它本身，在G中内闭一致收敛。

设f^{kn_j}收敛于h。则h在G内是解析函数。因为在z_0附近有极限（5.1），故h在z_0附近恒等于z_0。从而h在整个区域G都是恒等于z_0。这与（5.2）矛盾。证毕。

由此定理推出

$$f^{kn+j}(z)\to f^j(z_0), \quad \forall z\in G, \quad j=0,1,\cdots,k-1.$$

这就是说，轨道$O^+(z)$（$z\in G$）全部被吸引到$O^+(z_0)$上。

若G中有f的吸性（或超吸性）周期点，则G被称为吸性（或超吸性）稳定域，或简称为吸性域（或超吸性域）。

定理5.2 设G是F_f的一个连通分支，且$f^k(G)=G$。若$f^k|_G$不是$G\to G$的同胚，且f^k在G内没有不动点，则

$$f^{kn}(z)\to\zeta, \quad \forall z\in G, \tag{5.3}$$

其中$\zeta\in\partial G$。

证 首先证明：若f^{kn_j}在G内闭一致收敛于h，则h一定是常数。事实上，写$f^{kn_{j+1}}$为下列形式

$$f^{kn_{j+1}}=f^{k(n_{j+1}-n_j)}\circ f^{n_j}.$$

这样，我们有

$$h=H\circ h, \qquad (5.4)$$

其中H是$f^{k(n_{j+1}-n_j)}$的极限。假若h不是常数，那么它必在一点附近是共形的。于是，(5.4) 告诉我们H在该点附近是恒同映射。由H的解析性又推出，$H(z)\equiv z$，$\forall z\in G$。这就表明内闭一致有

$$f^{k(n_{j+1}-n_j)}\to id$$

这与$f^k|_G$不是同胚矛盾，这里id表示恒同映射。

设点ζ是f^{kn_j}的极限，也即

$$f^{kn_j}\to\zeta \quad (j\to\infty)$$

则$\zeta\in\overline{G}$。又因为

$$f^k(\zeta)=\lim_{j\to\infty}f^k\circ f^{kn_j}(z)=\lim_{j\to\infty}f^{kn_j}(f^k(z))=\zeta,$$

故ζ是f^k的不动点。已知f^k在G内没有不动点，因此，点$\zeta\in\partial G$。下面我们证明

$$f^{kn}(z)\to\zeta,\quad \forall z\in G.$$

f^k在$\hat{\mathbf{C}}$上只有有限个不动点。设它的不动点集合为

$$\{\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l\}.$$

我们已经证明了，$\{f^{kn}\}$的任意一个收敛子列都收敛于f^k的一个不动点。因此只要证明$l=1$就足够了。

用反证法 若$l>1$，则在每一个点ζ_j处取一个邻域v_j，使得它们彼此不相交，且

$$f^k(v_j)\cap\bigcup_{i\neq j}v_i=\varnothing,\ j=1,\cdots,l.$$

这意味着有无穷多m_j使得

$$f^{km_j}(z)\notin\bigcup_{i=1}^{m}v_i,\quad z\in G$$

这样，$\{f^{km_i}\}$ 有一个内闭一致收敛的子序列，其极限不在集合 $\{\zeta_1,\cdots,\zeta_l\}$之中，矛盾。证毕。

进一步讨论表明ζ是f^k的中性不动点，若将其特征值λ表为 $e^{2\pi i\alpha}$，还可证明α是有理数。

这个定理中所描述的法都集的连通分支被称为抛物型稳定域。

余下只有 $f^k|_G$ 是 $G\to G$的同胚的情况须要讨论。与上面讨论类似，应用广义许瓦兹引理可以证明，若在这种情况下f^k有不动点，则不动点一定是中性的。人们将有中性周期点的稳定域称为齐格尔（Siegel）域。在f^k没有不动点时，可以证明G一定是一个两连通域，被称为赫尔曼（Herman）环。

f^k在齐格尔域或赫尔曼环上的作用相当于一个旋转。

萨里温定理　次数>1 的有理函数的法都集的任意一个周期连通分支只能是下列五种稳定域之一：

(i) 超吸性域；

(ii) 吸性域；

(iii) 抛物型域；

(iv) 齐格尔域；

(v) 赫尔曼环。

从前面的讨论中可以看出广义许瓦兹引理起了相当重要的作用。